

DOTTORATO DI RICERCA
in
SCIENZE COMPUTAZIONALI E INFORMATICHE
Ciclo XVIII

Consorzio tra Università di Catania, Università di Napoli Federico II,
Seconda Università di Napoli, Università di Palermo, Università di Salerno

SEDE AMMINISTRATIVA: UNIVERSITÀ DI NAPOLI FEDERICO II

FRANCESCA CELLAMARE

“COSTRUZIONE DI UNA VERSIONE INTERATTIVA DEI “PROBLEMI”
DELL’*ARITHMETICA UNIVERSALIS* DI ISAAC NEWTON: ALCUNI ESEMPI”

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA

Indice

<i>Introduzione</i>	I
1. Costruzioni ottenute mediante il ricorso a risoluzioni geometriche	1
1.1 Problema XIV	3
1.2 Problema XVI	7
1.3 Problema XXI	10
1.4 Problema XXVII	19
1.5 Problema XXIV	35
1.6 Problema XLIII	39
1.7 Problema XLIV	60
1.8 Problema XLV	70
1.9 Problema XLVI	98
1.10 Problema LX	153
1.11 Problema LXI	168
2. Costruzioni ottenute “calcolando” le soluzioni	178
2.1 Problema XX	179
2.2 Problema XXII	189
2.3 Problema XXVI	196
3. Costruzioni relative a luoghi geometrici	203
3.1 Problema XXXIV	204
3.2 Problema XXXV	210
3.3 Problema XXXVI	223
3.4 Problema XXXVIII	228
3.5 Problema XXXIX	233
3.6 Problema LVII	237

4. <i>Costruzioni ottenute mediante la “costruzione” dell’equazione risolvente</i>	242
4.1 Problema V	243
4.2 Problema VI	247
4.3 Problema VII	251
5. <i>Problemi geometrici dell’Arithmetica Universalis di cui è stata realizzata un’immagine interattiva</i>	257
5.1 Problema V	258
5.2 Problema VI	261
5.3 Problema VII	264
5.4 Problema XIV	266
5.5 Problema XVI	268
5.6 Problema XX	270
5.7 Problema XXI	271
5.8 Problema XXII	273
5.9 Problema XXIV	275
5.10 Problema XXVI	279
5.11 Problema XXVII	281
5.12 Problema XXXIV	283
5.13 Problema XXXV	286
5.14 Problema XXXVI	288
5.15 Problema XXXVIII	291
5.16 Problema XXXIX	293
5.17 Problema XLIII	295
5.18 Problema XLIV	297
5.19 Problema XLV	299
5.20 Problema XLVI	301
5.21 Problema LVII	305
5.22 Problema LX	307
5.23 Problema LXI	309
<i>Conclusioni</i>	311
<i>Bibliografia</i>	313

Introduzione

Il progetto di ricerca in cui si inserisce la presente tesi dottorale consiste nella realizzazione di un'edizione interattiva dell'*Arithmetica Universalis* di Isaac Newton.

Tale trattato è stato composto tra il 1673 e il 1683, molto probabilmente come testo per le lezioni che Newton teneva all'Università di Cambridge, e fu pubblicato per la prima volta da W. Whiston nel 1707, senza la sua autorizzazione.

Nel 1722 lo stesso Newton ne pubblicò una nuova versione revisionata, e attualmente se ne annoverano cinque edizioni latine (1707, 1722, 1732, 1752, 1761), tre inglesi (1720, 1728, 1769), e una francese, pubblicata da Noel Beaudeau nel 1802.

Sebbene ci sia un precedente costituito dal progetto realizzato da D. E. Joyce, nel sito della Clark University, relativamente agli *Elementi* di Euclide, attualmente non esiste nessuna edizione interattiva del testo di Newton, né di altri trattati classici in cui sono presenti problemi matematici di un pari livello di complessità.

L'importanza di un simile progetto risiede nella capacità che la potenza divulgativa di internet ha di far rivivere le opere classiche, riaccendendo l'interesse verso esse, come afferma l'autore del sito dedicato all'opera di Euclide, e questa tesi dottorale si inserisce in esso, attraverso la costruzione di alcune delle immagini interattive che illustreranno i problemi affrontati da Newton nel suo trattato. In particolare, la sezione più ampia del primo tomo, è dedicata al modo di trasformare le questioni geometriche in equazioni, e in essa l'autore risolve sessantuno problemi geometrici, quasi tutti per via algebrica, compensando l'uso semplice della geometria con il ricorso a manipolazioni algebriche, e corredandoli con figure esplicative. Dal momento che tali figure non hanno un ruolo

puramente chiarificatore, bensì fungono da supporto e sono parte integrante della risoluzione, mi sono occupata della loro costruzione e in questa tesi tratterò dell'esecuzione di alcune di esse.

Il software di cui ho fatto uso, è la seconda versione di quello prodotto con il nome di *CABRI*, dall'Università *Joseph Fourier* di Grenoble. La scelta di utilizzare tale software, fra quelli adatti allo scopo, è legata sia alla sua affermazione sul piano scolastico, in quanto è diffuso in molte scuole europee di ogni ordine, sia alla possibilità di risolvere problemi complessi, scindendoli in altri più semplici, con l'ausilio delle *macro*.

Costruire un'immagine interattiva che illustra un dato problema, significa costruire una figura in cui sono presenti tutte le soluzioni del problema, e in cui si possano modificare inoltre, gli elementi che costituiscono i dati iniziali per valutarne gli effetti sugli oggetti finali.

Le difficoltà che nascono dal raggiungimento di un tale obiettivo, sono dovute a due ragioni. La prima, consiste nel fatto che quando Newton ha scritto la sua opera, il suo proposito non fu di determinare tutte le soluzioni dei problemi affrontati, come risulta subito evidente visionando il testo, ma piuttosto la convinzione di poter esprimere ogni proprietà geometrica in termini algebrici, e la ricerca di un modo per mostrare, a scopo didattico, la potenza del metodo algebrico.

La seconda, consiste invece nel fatto che le equazioni risolventi cui egli riduce ciascun problema, dipendono dalle relazioni che sussistono tra gli elementi che sono coinvolti nel problema, in virtù delle loro reciproche posizioni, nella figura che illustra la risoluzione, pertanto, in tutti i casi in cui cambiando la posizione degli oggetti iniziali, cambia anche l'equazione risolvente, le risoluzioni da lui proposte non permettono di individuare le soluzioni che corrispondono a ogni configurazione.

Nei casi in cui la costruzione dell'immagine eseguita con l'ausilio della risoluzione proposta da Newton, non permette di individuare tutte le soluzioni, ho ripercorso i procedimenti risolutivi, individuando i punti esatti in cui dalle parole dell'autore, si evince la scelta di un percorso che non è dovuto alle esigenze del problema, o alla presenza di qualche vincolo, bensì a una scelta arbitraria operata dallo stesso Newton, per giungere a una soluzione. Analogamente, per determinare le soluzioni dei problemi nelle configurazioni che conducono ad altre equazioni risolventi, ho ripercorso i procedimenti

risolutivi, facendo riferimento alle figure corrispondenti a tali configurazioni, e modificandoli laddove ciò è stato necessario.

Poiché, spinto dallo studio dei testi classici, e in particolare di Pappo, Newton risolve per via geometrica alcuni dei problemi presenti nell'*Arithmetica Universalis*, ho avuto modo di appurare che le costruzioni basate sulle risoluzioni geometriche, sebbene in generale presentino gli stessi inconvenienti di quelle basate sulle risoluzioni algebriche, sono in generale più semplici e più complete, pertanto, per la costruzione delle figure interattive, ho preferito fare uso, quando esistenti, delle risoluzioni geometriche sia di Newton, sia di altri matematici.

Ad ogni modo, i procedimenti adottati per superare le anzidette difficoltà comportano che gli algoritmi che si celano dietro la realizzazione di ogni disegno interattivo, non siano costituiti da un'unica costruzione, bensì dall'unione di più sotto-costruzioni.

La presenza di più sotto-costruzioni implica però un'ulteriore difficoltà, consistente nel fatto che le sotto-costruzioni danno luogo a più soluzioni, che possono corrispondere alla stessa configurazione, o a configurazioni diverse. Nel primo caso, esse devono coesistere, nel secondo, per evitare ambiguità o la visualizzazione di soluzioni errate, ciascuna sotto-costruzione deve essere invalidata ogni qualvolta la disposizione degli oggetti che intervengono nel problema, non dà luogo alla configurazione per cui le soluzioni da essa generate soddisfano le condizioni del problema.

Nasce dunque una nuova esigenza, che è quella di riuscire ad avviare ciascuna sotto-costruzione solo quando si verificano determinate condizioni, pertanto è necessario stabilire cosa caratterizza le configurazioni in cui devono essere visualizzate le soluzioni cui dà luogo ciascuna sotto-costruzione, e vincolare l'avvio di ogni sotto-costruzione all'esito positivo della richiesta che ne esprime la condizione.

In effetti, il raggiungimento di un simile obiettivo richiederebbe l'uso di un software che, mantenendo la semplicità e le capacità interattive del *CABRI*, fosse dotato della possibilità di inserire negli algoritmi che si celano dietro le costruzioni, segmenti di programma per risolvere ogni indecisione con l'ausilio di semplici comandi come *if*, *if then else*, ecc.

Riuscire a sviluppare un software che mantenendo le caratteristiche di quello attuale, ne superi i limiti cambiandone la filosofia, per dargli la forza di un linguaggio di programmazione, è indubbiamente un interessante problema aperto.

Tuttavia, dal momento che un simile progetto richiede un lavoro di equipe, in questa fase della ricerca tutti i problemi di tipo tecnico sorti, sono stati aggirati adottando delle strategie che, pur forzando la natura del *CABRI*, permettono di simulare quei comandi di un linguaggio di programmazione necessari per ottenere gli effetti desiderati. Questa scelta è stata operata considerando l'importanza che l'attuazione del progetto ha, sia per la didattica, sia per la storia della scienza, in quanto, un'immagine interattiva che accompagna la spiegazione di una nozione legata ad un problema, oltre ad essere di grande impatto visivo, permette di osservare, a differenza di un'immagine statica, come variano le soluzioni e il loro numero, al variare dei dati iniziali, inoltre, la possibilità di riscoprire opere dimenticate, può riportare all'attenzione dei concetti che oggi potrebbero assumere un nuovo ruolo, dando dei suggerimenti utili per la ricerca.

La suddivisione dei problemi presentati nella tesi nei diversi capitoli, è stata fatta in base ai metodi usati per la realizzazione delle immagini, in quanto essi danno luogo a diverse tipologie di costruzione, ciascuna delle quali richiede il ricorso a tecniche informatiche diverse. Un ulteriore capitolo è dedicato alla traduzione della versione originale in cui gli anzidetti problemi sono presentati nel testo di Newton.

In particolare, l'esposizione della descrizione relativa alla realizzazione dell'immagine interattiva che illustra ciascun problema, è preceduta da un breve cenno alla risoluzione presentata da Newton (quantità considerate note, incognite scelte, equazioni risolventi, soluzioni), e dall'esposizione di tutte le altre risoluzioni utilizzate, invece la traduzione delle versioni originali, è corredata da note esplicative che ne facilitano la comprensione.

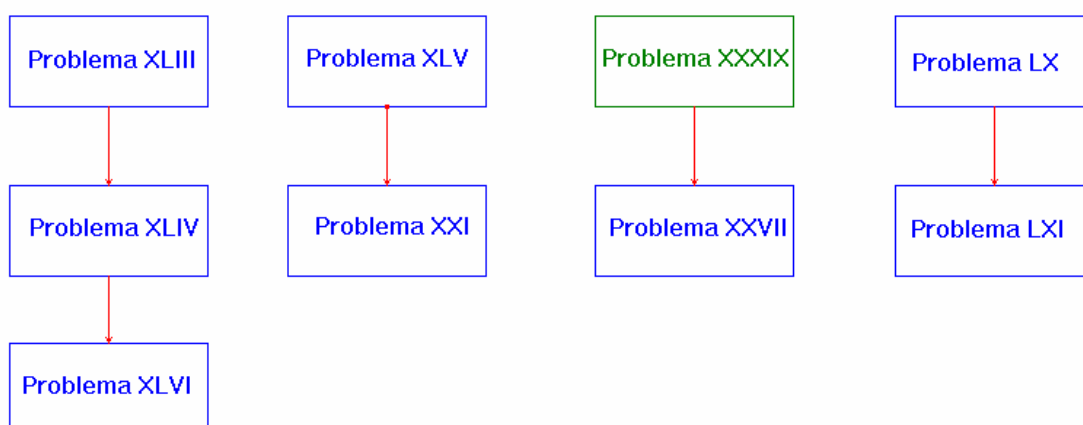
Inoltre, per la numerazione dei paragrafi in ogni capitolo, è stato rispettato l'ordine numerico dei problemi, tuttavia, ove ciò si è reso necessario per garantire una miglior comprensione, è stato inserito uno schema in cui è rappresentata la struttura del capitolo, ovvero la dipendenza di ogni problema dai problemi discussi nello stesso capitolo o negli altri.

Infine, per rendere più semplice la lettura delle descrizioni relative alle costruzioni effettuate con *CABRI*, sono stati usati i caratteri in grassetto per scrivere tutte le parole che si riferiscono ai comandi predefiniti dal software, o ai nomi delle *macro* create, e, per dare la possibilità di visionare le costruzioni, è stato allegato alla presente un CD – Rom, in cui si trovano tutti i disegni interattivi realizzati.

Costruzioni ottenute mediante il ricorso a risoluzioni geometriche

Nel presente capitolo è descritta la costruzione delle immagini interattive relative a problemi che possono essere ridotti a problemi geometrici più semplici, o per i quali esiste un'equivalente risoluzione geometrica.

Sebbene la numerazione dei paragrafi segua la disposizione con cui Newton ha presentato i problemi nell'*Arithmetica Universalis*, la struttura del capitolo è la seguente:



I Problemi XIV, XVI e XXIV, non sono presenti nello schema in quanto sono indipendenti dagli altri. In particolare, il primo è stato ridotto da Newton ad una equazione di terzo grado, e la sua soluzione è stata costruita mediante il procedimento indicato da Viète, il secondo è stato costruito determinando le sue soluzioni come punti d'intersezione di una retta e di un'ellisse, e il terzo è stato costruito mediante la risoluzione presentata da Apollonio nel suo trattato sulle *Inclinazioni*.

Per quanto concerne i restanti problemi:

- I Problemi XLIII, XLIV, XLV e XLVI, sono relativi ai *Contatti* di Apollonio, e per la loro costruzione sono state analizzate sia le risoluzioni geometriche proposte dallo stesso Newton nel *Quaestionum solutio geometrica*, sia le risoluzioni proposte da Viète nell'*Apollonius gallus*.
- Del Problema XXI, che è ridotto da Newton ad una equazione di secondo grado, è presente sia la costruzione ottenuta riportando in un opportuno sistema di riferimento le radici dell'equazione risolvente, sia la costruzione geometrica che permette di ridurlo al Problema XLV.
- Il Problema XXVII è stato costruito determinando le sue soluzioni come punti d'intersezione di due luoghi geometrici, la cui costruzione è descritta nel Problema XXXIX (Paragrafo 3.5).
- I Problemi LX e LXI sono relativi ai contatti ma hanno per soggetto una conica, e la loro costruzione è stata eseguita mediante le risoluzioni geometriche proposte dallo stesso Newton nel *Solutio Problematis Veterum de Loco Solido*.

1.1 Problema XIV

Trovare il triangolo ABC di cui i tre lati AB, AC, BC, e l'altezza CD sono in progressione aritmetica.

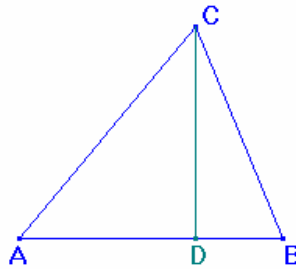


Figura 1

Posto $AC = a$, Newton sceglie come incognita $BC = x$, e riduce il problema all'equazione di terzo grado $8x^3 - 36ax^2 + 54a^2x - 25a^3 = 0$, tuttavia conclude la sua risoluzione affermando che se avesse posto $AC - BC = d$ e avesse scelto come incognita $CD = x$, sarebbe giunto, con un procedimento più corto, all'equazione $x^3 = 24d^2x + 48d^3$ (\blacklozenge)¹, che è più semplice della precedente.

Trattandosi di un'equazione di terzo grado, dunque riducibile per radicali, malgrado l'espressione delle radici in funzione dei coefficienti non sia affatto semplice, è possibile realizzare un disegno interattivo relativo al problema in esame determinando tali radici con l'ausilio della calcolatrice interattiva presente in *CABRI*. Vi è però un'alternativa indicata da Viète, costituita dalla possibilità di ridurre l'equazione in questione alla determinazione di due medi continui proporzionali, che permette di raggiungere molto più semplicemente lo scopo prefissato.

¹ Paragrafo 5.4, nota 227.

Più precisamente, nel *Trattato sulla comprensione delle equazioni*, Viète dimostra che per i cubi affetti da termini lineari, ovvero equazioni del tipo $A^3 - 3B^p A = B^p D$ (\clubsuit)², in cui il quadrato della costante è maggiore del quadruplo del cubo di un terzo del coefficiente piano, ovvero in cui $(B^p D)^2 > 4 \left(\frac{3B^p}{3} \right)^3 \Rightarrow D^2 > 4B^p$, esistono quattro segmenti in proporzione continua tali che, ponendo A uguale alla somma dei medi, il prodotto degli estremi (o dei medi) è B^p , e la somma degli estremi è D ³.

Ovvero, esistono quattro segmenti h , b , c e k , tali che $h:b = b:c = c:k$, $A = b + c$, $B^p = h \cdot k = b \cdot c$ e $D = h + k$.

Poiché Viète ha precedentemente osservato che per determinare la somma di due radici, noti il loro prodotto e la somma dei loro cubi, occorre risolvere l'equazione $A^3 - 3B^p A = D^s$ (\spadesuit), in cui A indica la somma delle radici, B^p il loro prodotto, e D^s la somma dei loro cubi⁴, per rendersi conto della veridicità della sua asserzione è sufficiente confrontare le equazioni (\clubsuit) e (\spadesuit). In tal modo infatti, si evince che $B^p D$ è uguale alla somma dei cubi delle radici, ovvero alla somma dei cubi dei medi b e c , della serie di continui proporzionali h , b , c e k , pertanto $D = \frac{B^p D}{B^p} = \frac{b^3 + c^3}{bc} = \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{b} = h + k$ ⁵.

Poiché l'equazione $x^3 = 24d^2 x + 48d^3$, che è del tipo $A^3 - 3B^p A = B^p D$, con $B^p = 8d^2$ e $D = 6d$, verifica la condizione $D^2 > 4B^p$ (essendo $D^2 = 36d^2$ e $4B^p = 32d^2$), esistono quattro segmenti h , b , c e k , tali che $h:b = b:c = c:k$, $A = b + c$, $B^p = h \cdot k = 8d^2$ e $D = h + k = 6d$. Pertanto, per determinare una radice dell'equazione $x^3 = 24d^2 x + 48d^3$, e

² La struttura dell'equazione è dovuta alla *Legge di Omogeneità*, che Viète ha introdotto nel terzo capitolo dell'*Isagoge* (1591), secondo la quale possono essere confrontate o sommate solo grandezze dello stesso genere. Egli fu il primo ad introdurre una netta distinzione tra l'importante concetto di parametro e l'idea di quantità incognita, e in particolare usò le consonanti per denotare le quantità note e le vocali per denotare le incognite.

³ *The Analytic Art, Treatise on the Understanding Equations*, Capitolo VI, Teorema II, p. 172

⁴ *The Analytic Art*, Libro secondo, Zetetica XX, p. 111

⁵ Le uguaglianze $h = \frac{b^2}{c}$ e $k = \frac{c^2}{b}$, seguono rispettivamente da $h:b = b:c$ e $b:c = c:k$.

quindi una soluzione del problema, occorre determinare due medi continui proporzionali tra $h = 4d$ e $k = 2d$ ⁶, e poi sommarli.

Nella Proposizione XXV del *Supplementum Geometriae*⁷, Viète ha affermato che in una serie di medi continui proporzionali, indicati con B e D gli estremi e con A il secondo termine, si ha che $A^3 = B^2 D$. Infatti, se $B : A = A : Z = Z : D$ da $B : A = A : Z$ si ottiene $Z = \frac{A^2}{B}$ e da $B : A = Z : D$ si ottiene $A \cdot Z = \frac{A^3}{B} = B \cdot D$, ovvero $A^3 = B^2 D$.

Di conseguenza, per determinare i medi continui proporzionali b e c , tra $2d$ e $4d$, è sufficiente calcolare $b = \sqrt[3]{h^2 \cdot k} = 2\sqrt[3]{4d}$ e $c = \frac{b^2}{h} = 2\sqrt[3]{2d}$.

Per realizzare con *CABRI* un disegno interattivo relativo al problema in esame, dopo aver disegnato una **semiretta** di origine Q , e un **segmento** QL su di essa, che rappresenta la quantità nota $AC - BC = d$ (fig. 2), ho dunque **misurato** la lunghezza di QL e ho **calcolato** i valori di b e c , e quindi di $CD = x = b + c$.

Fatto ciò, ho **calcolato** le lunghezze dei lati del triangolo, che data l'ipotesi sono uguali rispettivamente a $AB = x + 3d$, $AC = x + 2d$, $BC = x + d$ ⁸ e, dopo aver disegnato una **retta** r e un **punto** A su di essa, ho individuato i vertici B e C , e poi il **triangolo** cercato ABC , **trasportando** la misura di AB su r , e le misure di AC e BC rispettivamente su A e su B .

La soluzione così determinata è l'unica soluzione del problema, in quanto, indicata con α la radice reale dell'equazione (\diamond), si ha che $x^3 - 24d^2x - 48d^3 = (x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2 - 24d^2)$ e il discriminante $\Delta = -3\alpha^2 + 96d^2$ dell'equazione $x^2 + \alpha x + \alpha^2 - 24d^2$ è negativo⁹.

⁶ Dal momento che $h + k = 6d$ e $h \cdot k = 8d^2$, h e k sono radici dell'equazione $t^2 - 6dt + 8d^2 = 0$.

⁷ *The Analytic Art, Supplementum Geometriae*, Proposizione – XXV, p. 416

⁸ Paragrafo 5.4, note 227 e 228.

⁹ $\Delta = -3\alpha^2 + 96d^2 = -3(b+c)^2 + 96d^2 = -3(b^2 + c^2 + 2bc - 32d^2)$ che, essendo $b \cdot c = 8d^2$, è uguale a $-3(b^2 + c^2 + 16d^2 - 32d^2) = -3(b^2 + c^2 - 16d^2) \leq -3(2bc - 16d^2) = -3(16d^2 - 16d^2) = 0$.

Pertanto, inserita nella figura costruita una casella di testo in cui è indicato come interagire con essa, ho ottenuto un disegno interattivo che illustra in modo esauriente il problema esaminato (fig. 3).

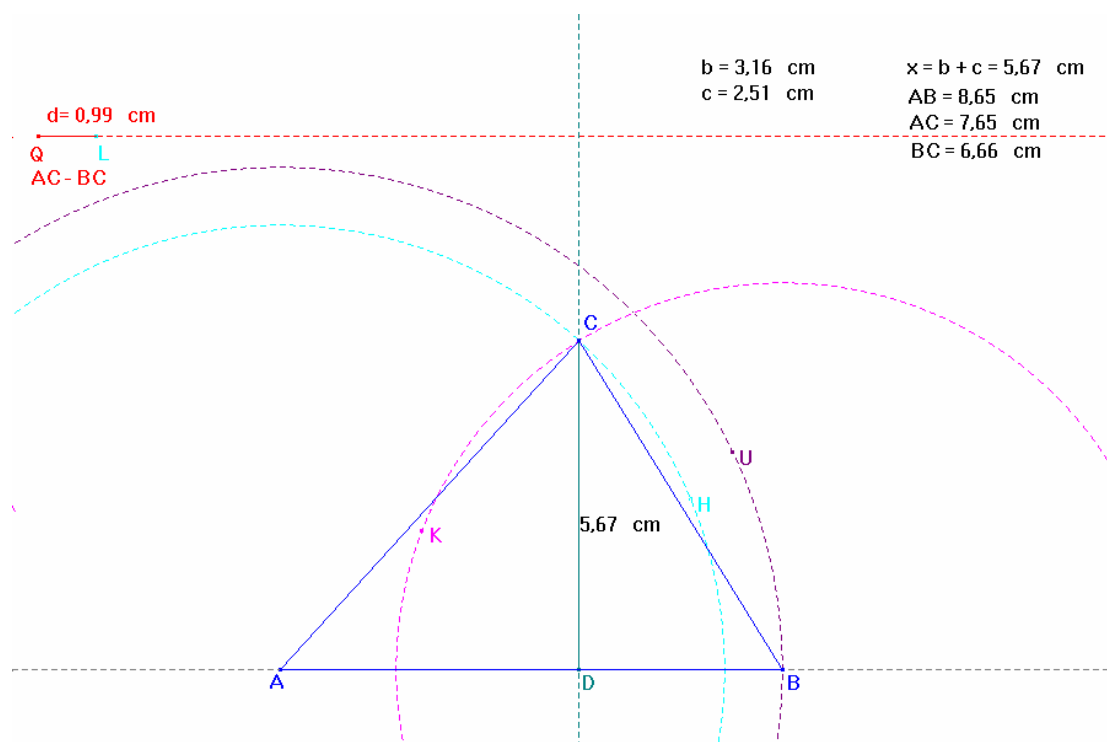


Figura 2

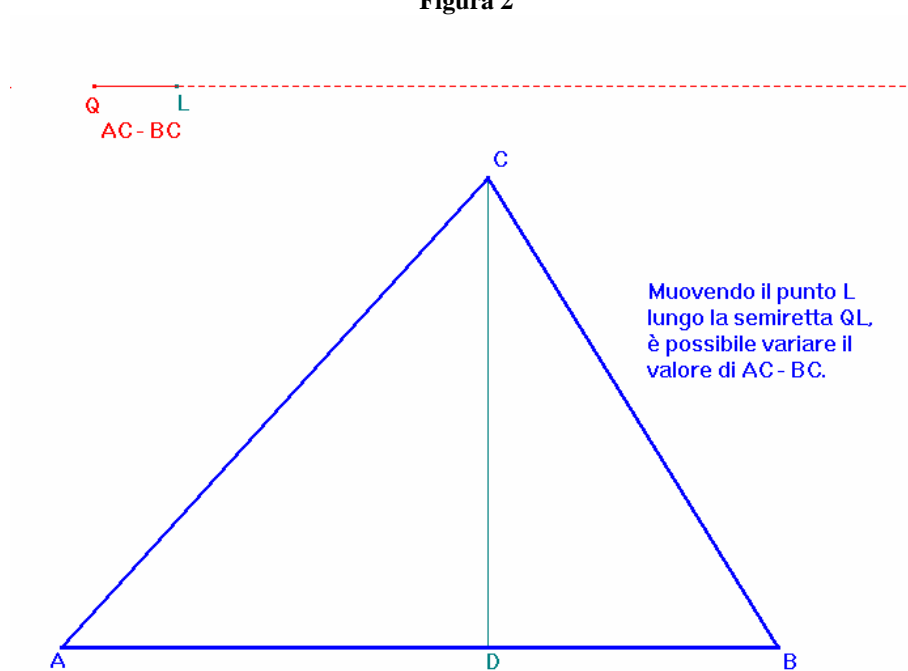


Figura 3

1.2 Problema XVI

Su una base data AB , costruire il triangolo ABC , il cui vertice C è su una retta CE data di posizione, e la cui base è media proporzionale aritmetica tra i lati.

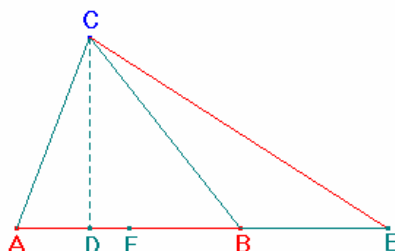


Figura 1

Determinato il punto medio F , di AB , e indicati con E , il punto d'intersezione della retta AB con la retta data di posizione EC , e con D , il piede della perpendicolare condotta dal punto cercato C su AB , Newton sceglie come incognita $BC - AB = x$, e, posto in accordo con i DATI di Euclide, $AB = a$, $FE = b$ e $\frac{DE}{CD} = \frac{d}{e}$, riduce il problema all'equazione di secondo grado:

$$x^2 = \frac{\frac{3}{4}d^2a^2 - e^2b^2 - 4e^2bx}{4e^2 + 3d^2}.$$

Sebbene il problema in esame ammetta in generale due soluzioni, egli scrive la sola radice

$$x = \frac{-2e^2b + d\sqrt{3e^2a^2 - 3e^2b^2 + \frac{9}{4}d^2a^2}}{4e^2 + 3d^2}, \text{ e conclude poi la risoluzione del problema}$$

affermando che noto x , tali sono BC e AC , in quanto $BC = a + x$ e $AC = a - x$ ¹⁰.

Per realizzare un disegno interattivo relativo al problema in esame, dopo aver stabilito se, e in che modo, l'equazione risolvente dipenda dalla disposizione degli enti geometrici che costituiscono i dati iniziali, si possono individuare le soluzioni del problema determinando le radici dell'equazione risolvente con l'ausilio della calcolatrice interattiva. Vi è però

¹⁰ La seconda soluzione corrisponde all'altra radice dell'equazione risolvente.

un'alternativa molto più semplice che consente, sia di pervenire alla determinazione di entrambe le soluzioni del problema, sia di visualizzare in quali casi il problema non ammette soluzioni. Più precisamente, poiché la lunghezza di AB è media proporzionale aritmetica tra AC e BC , si ha che $AC + BC = 2AB$, pertanto i due punti C che soddisfano le condizioni del problema sono i punti d'intersezione della retta data di posizione CE , con l'ellisse di fuochi A e B , e semiasse maggiore AB ¹¹.

Per eseguire tale costruzione con *CABRI*, dopo aver disegnato due **rette** r e s , e un **segmento** AB , su s (fig. 2), ho disegnato il **punto medio** F , di AB , e i **simmetrici** P e Q , del punto F , rispetto al punto A e al punto B , che costituiscono due vertici della suddetta ellisse. Per determinare gli altri due vertici R e S , dopo aver **misurato** la lunghezza di AB , ho

calcolato la lunghezza $\overline{FR} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{FB}^2} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}\overline{AB}^2}$, del semiasse

minore e, dopo averla **trasportata** su F , individuando il punto I , ho intersecato il **cerchio** di centro F passante per I , con la **retta perpendicolare** t , a s passante per F .

Poiché per disegnare un'ellisse con *CABRI* occorre evidenziare cinque punti, ho poi determinato un ulteriore punto dell'ellisse mediante l'equazione $\frac{x^2}{\overline{AB}^2} + \frac{4y^2}{\overline{AB}^2} = 1$, che la

rappresenta nel sistema di assi cartesiani di origine F e assi s e t . In particolare, dopo aver

calcolato l'ordinata $\overline{FT} = \frac{3}{4}\overline{AB}$, del punto di ascissa $\overline{FB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, l'ho **trasportata** su B ,

individuando il punto J , e ho individuato il punto T dell'ellisse intersecando il **cerchio** di centro B passante per J , con la **retta perpendicolare** a s passante per B . Disegnata infine l'**ellisse** \mathcal{E} , passante per i punti P , Q , R , S e T , ne ho determinato i **punti d'intersezione** C e C' , con la retta r , che esistono soltanto se r e \mathcal{E} non sono esterni, e ho completato la costruzione disegnando i **triangoli** ABC e ABC' , che soddisfano le condizioni del problema.

¹¹ *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. V, p. 239, nota 296

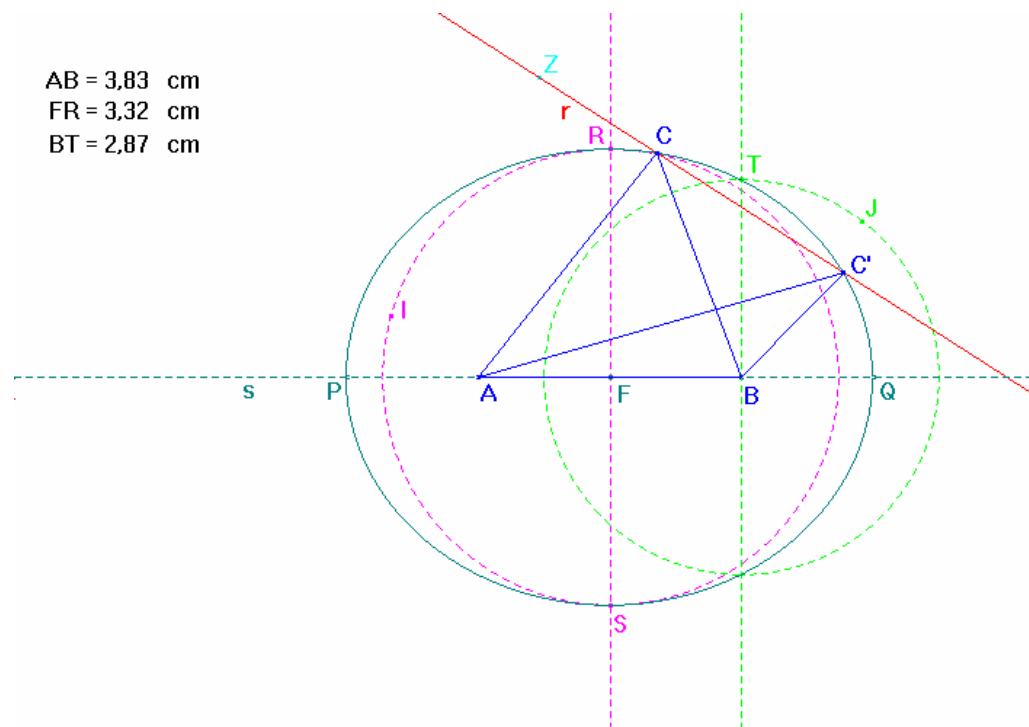


Figura 2

Nel disegno interattivo, in cui compaiono entrambe le soluzioni del problema, è presente anche l'ellisse \mathcal{E} , in quanto permette di stabilire in quali casi il problema non ammette soluzioni, inoltre ho inserito una casella di testo per indicare quali sono gli oggetti mobili e come possono essere spostati (fig. 3).

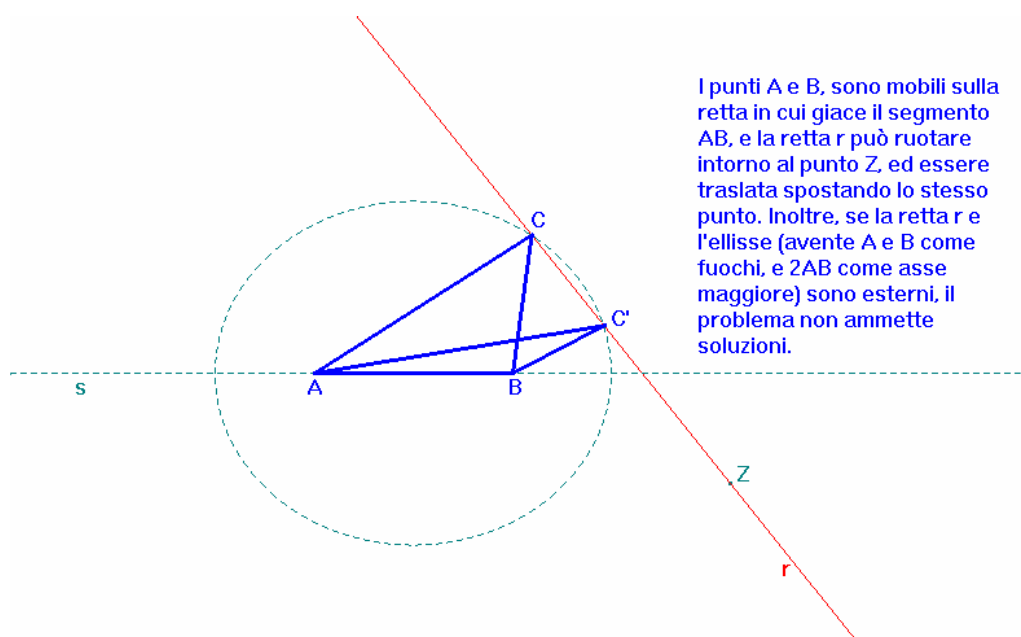


Figura 3

1.3 Problema XXI

Determinare un punto C sulla retta DF tale che, se da questo punto si conducono due segmenti AC e BC , per due punti dati A e B , la differenza di questi due segmenti sia uguale ad una linea data.

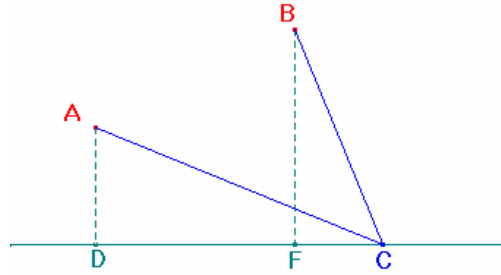


Figura 1

Per risolvere il problema, condotte dai punti A e B , le perpendicolari AD e BF , alla retta CF , Newton sceglie come incognita $DC = x$, e pone, in accordo con i *DATI* di Euclide, $AD = a$, $BF = b$, $DF = c$ e $AC - BC = d$.

Nell'ipotesi che AC sia maggiore di BC ¹², riduce poi il problema all'equazione di secondo grado:

$$(d^2 - c^2)x^2 - 2ce^2x + d^2a^2 - e^4 = 0 \ (\diamond),$$

in cui $e^2 = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}$, e conclude la sua risoluzione scrivendo la sola radice

$$x = \frac{e^2c + \sqrt{e^4d^2 - a^2d^4 + a^2d^2c^2}}{d^2 - c^2}.$$

In effetti, il problema in esame ammette in generale due soluzioni a cui, nella configurazione considerata, è possibile pervenire mediante le radici dell'equazione (\diamond), tuttavia se il punto B si trova a sinistra del punto A , l'equazione risolvente del problema non

¹² Supponendo AC minore di BC , si perviene alla stessa equazione.

è più (♦), bensì $(d^2 - c^2)x^2 + 2ce^2x + d^2a^2 - e^4 = 0$ ¹³ (♠), pertanto, in tale eventualità, per determinare le due soluzioni del problema occorre considerare entrambe le radici dell'equazione (♠).

Dal momento che la diversità tra (♠) e (♦), consiste solo nel segno del coefficiente del termine di primo grado, le due equazioni hanno radici opposte, pertanto, per distinguere i due casi, è sufficiente considerare soltanto le radici di (♦), e riportarle in un sistema di coordinate cartesiane, di origine D , avente l'orientamento dell'asse delle ascisse dipendente dalla posizione del punto B rispetto al punto A ¹⁴.

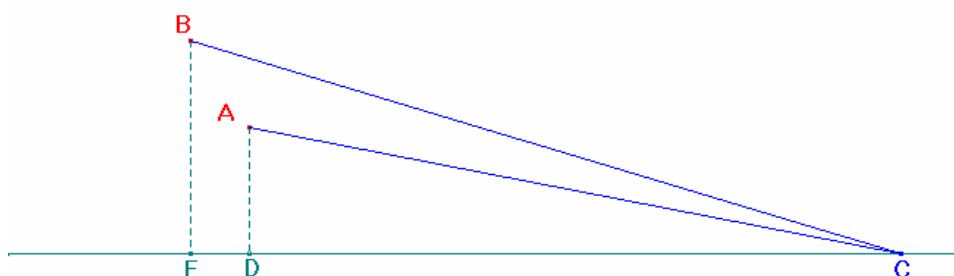


Figura 2

Per realizzare con *CABRI* tale costruzione, dopo aver disegnato due **punti** A e B , e una **retta** r (fig. 3), ho rappresentato il valore assoluto della differenza delle lunghezze dei segmenti AC e BC , ovvero $|d|$, con un **segmento** QL , avente l'estremo L mobile sulla **semiretta** QL . Completata in tal modo la costruzione degli enti geometrici che costituiscono i dati iniziali del problema, ho disegnato le **rette perpendicolare** t e s , alla retta r , passanti rispettivamente per A e B , i **punti d'intersezione** D , di t con r , e F , di s con

¹³ Si ottiene sostituendo l'espressione $FC = FD + DC = c + x$, all'espressione $FC = DC - DF = x - c$, nel procedimento risolutivo di Newton (Paragrafo 5.7).

¹⁴ Per giungere all'equazione (♦), Newton ha posto $\overline{AC} - d = \overline{BC}$, pertanto determinate le radici di tale equazione, per essere certi che con esse si individuano dei punti che soddisfano le condizioni del problema, occorre verificare sia che la distanza del punto A (o del punto B) dai punti soluzione sia maggiore di d , sia che la quantità $e^2 + c \cdot CD (= x)$ sia non negativa (in quanto, in caso contrario si ha che $\overline{AC} + \overline{BC} = d$).

r , e il **sistema di assi** cartesiani $DJxJy$ ¹⁵. In seguito, ho determinato la **misura** dei **segmenti**

AD , BF , DF , e QL , e, dopo aver **calcolato** i valori $x+ = \frac{e^2c + \sqrt{e^4d^2 - a^2d^4 + a^2d^2c^2}}{d^2 - c^2}$ e

$x- = \frac{e^2c - \sqrt{e^4d^2 - a^2d^4 + a^2d^2c^2}}{d^2 - c^2}$, delle radici di (\diamond), li ho **trasportati** sull'asse delle

ascisse del sistema fissato, individuando così due punti C e C' . Dal momento che i punti determinati appaiono anche se non soddisfano le condizioni del problema¹⁶, ho disegnato i **segmenti** AC , BC , AC' e BC' , e, dopo aver **misurato** la loro lunghezza, ho **calcolato** le quantità:

$$n = \frac{e^{\sqrt{||AC-BC|-d|}}}{e^{\sqrt{||AC-BC|-d|}}} = \begin{cases} 1 & \text{se } C \text{ soddisfa le condizioni del problema} \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$m = \frac{e^{\sqrt{||AC'-BC'|-d|}}}{e^{\sqrt{||AC'-BC'|-d|}}} = \begin{cases} 1 & \text{se } C' \text{ soddisfa le condizioni del problema} \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases} ,$$

e successivamente i prodotti $n \times (x+)$ e $m \times (x-)$. **Trasportando** i risultati ottenuti sull'asse delle ascisse del sistema di riferimento fissato, ho poi individuato due nuovi punti C e C' , che appaiono solo se soddisfano le condizioni del problema, pertanto, dopo aver **nascosto** i punti determinati in precedenza e i segmenti da essi uscenti, ho disegnato i **segmenti** AC , BC , AC' e BC' .

¹⁵ **Trasportando** il numero 1 sul punto D , ho individuato un punto U , e quindi il **cerchio** di centro D passante per U , che ha raggio unitario. Poi ho determinato i **punti d'intersezione** Jx e Jy , di tale cerchio rispettivamente con la **semiretta** DF e con la **retta perpendicolare** a r , passante per D , e infine ho definito il **sistema di assi** $DJxJy$. L'esigenza di definire l'unità di misura di tale sistema di assi uguale a 1, nasce del fatto che in esso verranno riportati i valori delle radici dell'equazione risolvibile del problema. Invece, la scelta di Jx sulla semiretta DF , cambia l'orientamento dell'asse delle ascisse, in funzione della posizione di B rispetto al punto A .

¹⁶ Nota 14.

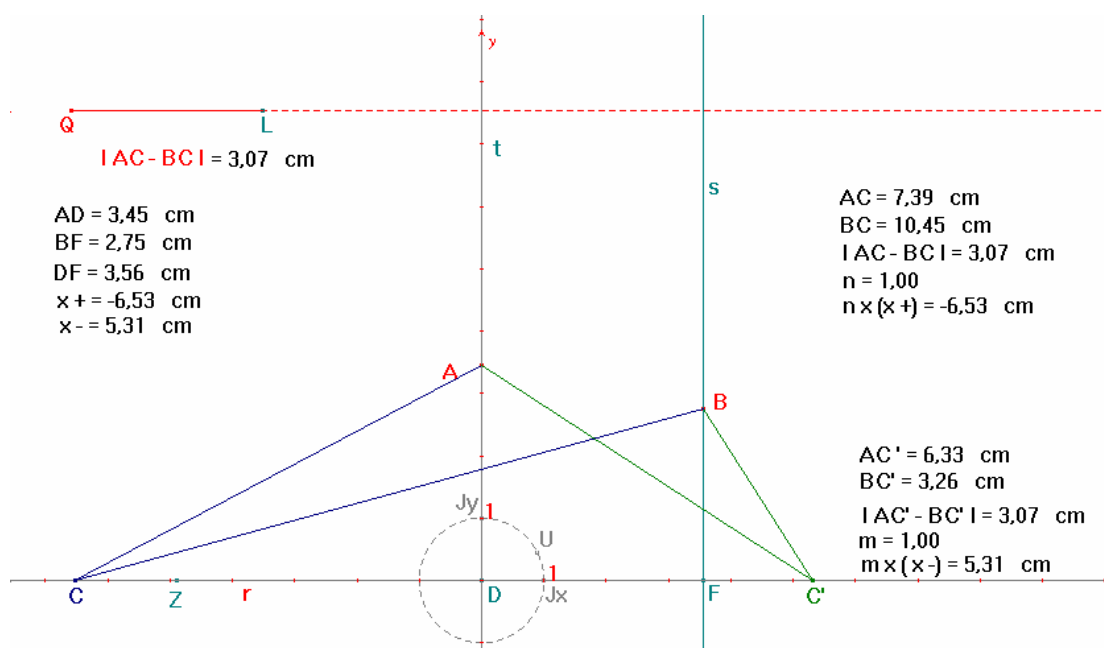


Figura 3

Analizzando la figura ottenuta per stabilirne il corretto funzionamento, ho tuttavia appurato che la dipendenza di Jx dalla semiretta DF , che è inesistente nel caso in cui B giace sulla retta t , fa sì che in tale eventualità la costruzione non abbia luogo. Per ovviare all'inconveniente, dopo aver posizionato B sulla **retta** t (fig. 4), e aver disegnato il **punto d'intersezione** Jx' , del cerchio unitario di centro D , con r , ho definito il **sistema di assi** $DJx'Jy$, e ho trasportato sul suo asse delle ascisse i valori delle radici. Poiché in tal modo, nel caso in cui B non giace su t , appaiono costruzioni errate o sovrapposte a quelle già disegnate, dopo aver misurato la distanza d_B , di B dalla retta t , ho **calcolato** la quantità

$$q = e^{\sqrt{-d_B}} = \begin{cases} 1 & \text{se } B \text{ giace su } t \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases} \text{ e successivamente il suo prodotto per la radice } x+.$$

Trasportando il risultato sull'asse delle ascisse del nuovo sistema di assi, ho poi determinato uno dei punti che soddisfano le condizioni del problema nella configurazione considerata, ma che non appare in altre configurazioni. E, dal momento che quando B giace su t si ha che $(x-) = -(x+)$, per determinare l'altro punto soluzione, ho disegnato il **simmetrico** del punto già trovato rispetto al punto D .

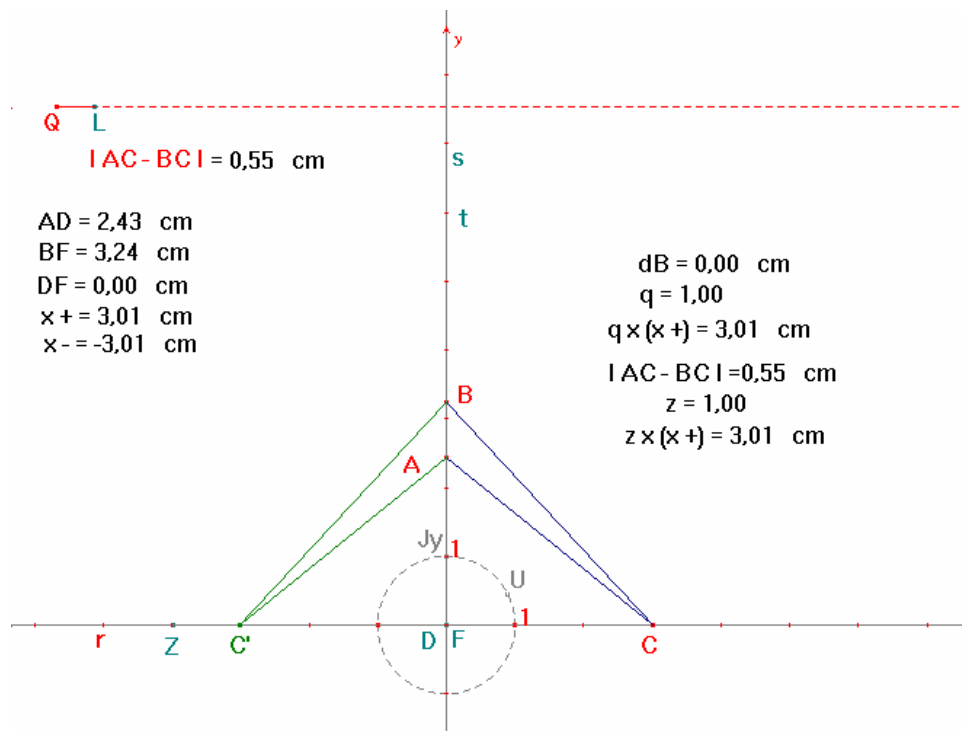


Figura 4

Come nella costruzione relativa al caso generale, i punti C e C' così determinati appaiono anche se non soddisfano le condizioni del problema, pertanto, disegnati i **segmenti** AC e BC , e **misurata** la loro lunghezza, ho **calcolato** la quantità:

$$z = \frac{e^{\sqrt{-|AC-BC|-d|}}}{e^{\sqrt{-|AC-BC|-d|}}} = \begin{cases} 1 & \text{se } C \text{ soddisfa le condizioni del problema} \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e successivamente il suo prodotto per $x+$. **Trasportando** il risultato ottenuto sull'asse delle ascisse del sistema di riferimento fissato, ho poi individuato un nuovo punto C e il suo **simmetrico** C' , rispetto a D , che appaiono solo se soddisfano le condizioni del problema, nel caso in cui B giace su t . Pertanto, dopo aver **nascosto** i punti determinati in precedenza e i segmenti da essi uscenti, ho disegnato i **segmenti** AC , BC , AC' e BC' .

La figura costruita è ora completa oltre che corretta, in quanto in essa compaiono tutte le soluzioni del problema in ogni configurazione, pertanto, **nascosto** il sistema di assi, e inserita in essa una casella di testo, ove è indicato quali sono gli oggetti mobili, e come

possono essere spostati (fig. 5), ho ottenuto un disegno interattivo che illustra esaurientemente il problema.

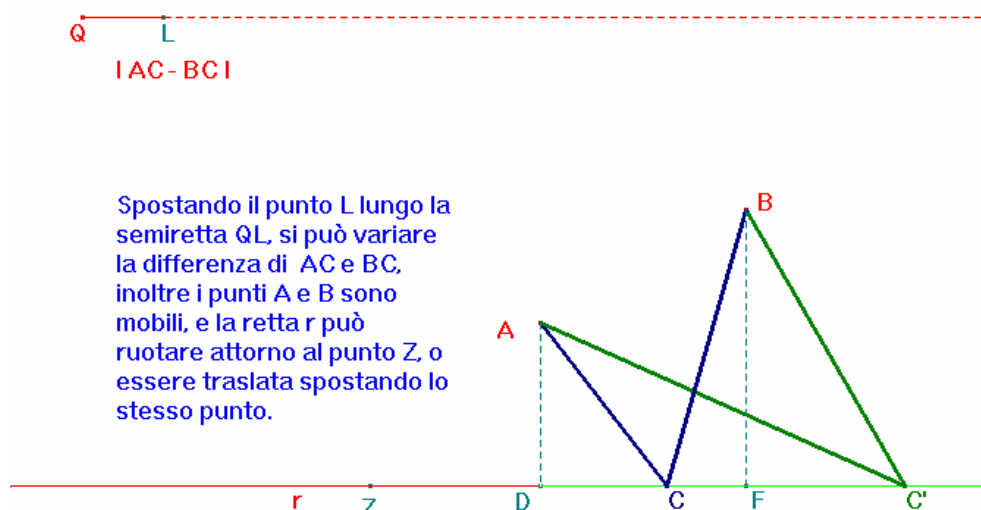


Figura 5

Poiché lo stesso problema può essere altresì risolto geometricamente, malgrado abbia già raggiunto l'obiettivo di realizzare un disegno interattivo a esso relativo, ho analizzato anche la costruzione relativa alla risoluzione geometrica, per confrontarla con la precedente e stabilire quale delle due consenta di raggiungere più semplicemente lo scopo a cui è finalizzata la loro realizzazione.

In particolare, la risoluzione geometrica consiste nel ridurre il presente problema, al problema della determinazione dei cerchi passanti per due punti e tangenti un cerchio¹⁷, mediante semplici considerazioni, ovvero, osservando che, detto A' il simmetrico di A rispetto alla retta data (fig. 6), e \mathcal{C} il cerchio di centro B e raggio $|d| = |CA - CB|$, i punti C e C' che soddisfano le condizioni del problema sono i centri dei cerchi \mathcal{G} e \mathcal{H} , passanti per A e A' , e tangenti \mathcal{C} . La veridicità dell'asserto è conseguenza del fatto che, detti K e H i punti di contatto di \mathcal{G} e \mathcal{H} , con il cerchio \mathcal{C} , i segmenti KB e BH hanno lunghezza pari a $|d|$, mentre i

¹⁷ *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, vol. V, p. 195, nota 232.

segmenti CK e $C'H$, hanno lunghezza pari rispettivamente a CA e $C'A$, pertanto,
 $|CA - CB| = CK - CB = |d|$ e $|C'A - C'B| = C'B - C'H = |d|$.

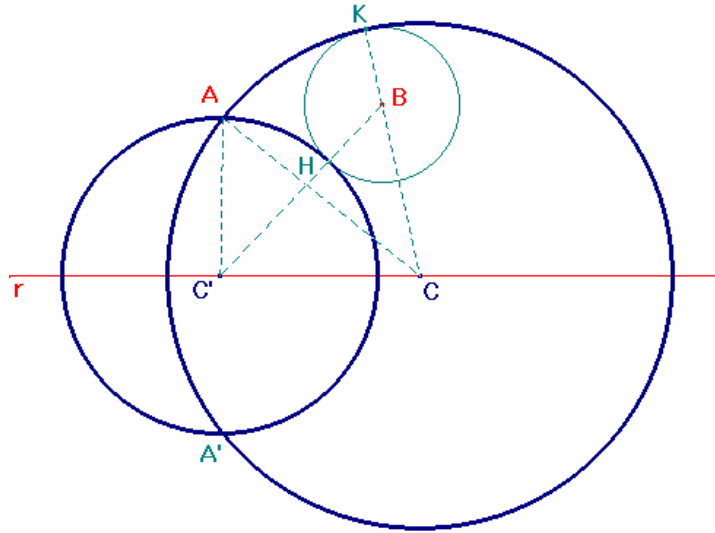


Figura 6

Per realizzare tale costruzione con *CABRI*, dopo aver disegnato due **punti** A e B (fig. 7), una **retta** r , il **simmetrico** A' , di A rispetto a r , ho **riportato** il segmento QL sul punto B , e ho poi applicato al cerchio compasso e ai punti A e A' , la *macro* **Cerchi per due punti tangenti un cerchio**¹⁸. Poiché tale *macro* è stata definita dopo avere nascosto i centri dei cerchi finali, che appaiono anche quando non dovrebbero, ho disegnato C e C' come **punti d'intersezione** della retta r , con l'**asse** di una corda dei cerchi determinati, e, dal momento che tali punti, come nella costruzione precedente, appaiono anche se non rappresentano soluzioni del problema, ho costruito due punti sovrapposti a essi, che vengono visualizzati solo se soddisfano le condizioni richieste.

Più precisamente, disegnati i **segmenti** AC , BC , AC' , BC' , AM e AM' , con M e M' **punti medi** rispettivamente di AC e AC' , e, **misurata** la loro lunghezza, ho **calcolato** le quantità:

$$n' = \frac{e^{\sqrt{|AC-BC|-d|}}}{e^{\sqrt{|AC-BC|-d|}}} = \begin{cases} 1 & \text{se } C \text{ soddisfa le condizioni del problema} \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

¹⁸ Paragrafo 1.8.

$$m' = \frac{e^{\sqrt{|\|AC'-BC'\|-d|}}}{e^{\sqrt{|\|AC'-BC'\|-d|}}} = \begin{cases} 1 & \text{se } C' \text{ soddisfa le condizioni del problema} \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e successivamente i prodotti $n' \times AM$ e $m' \times AM'$. **Trasportando** i risultati ottenuti sul punto A , ho poi individuato due punti Q e Q' , che appaiono solo se i centri dei cerchi determinati con la *macro* **Cerchi per un punto tangenti un cerchio**, soddisfano le condizioni del problema. Pertanto, dopo aver determinato i **punti d'intersezione** N , del segmento AC con il **cerchio** di centro A passante per Q , e N' , del segmento AC' con il **cerchio** di centro A passante per Q' , ho disegnato il **simmetrico** C , di A rispetto a N , e il **simmetrico** C' , di A rispetto a N' , che a differenza dei punti omonimi appaiono solo se soddisfano le condizioni del problema. **Nascosti** dunque i punti determinati in precedenza e i segmenti da essi uscenti, ho completato la costruzione disegnando i **segmenti** AC , BC , AC' e BC' .

Analizzando la figura costruita per stabilire la sua correttezza, ho tuttavia appurato che se B giace su r , la *macro* **Cerchi per un punto tangenti un cerchio** dà luogo a due cerchi diversi da quelli che appaiono in generale¹⁹ (fig. 8), pertanto per completare la figura, occorre analizzare tale caso separatamente. Inoltre, poiché nel caso in cui il punto A giace su r , si ha che A coincide con A' e la suddetta *macro* non dà luogo a nessun cerchio, è necessario ripetere la costruzione scambiando i ruoli tra A e B ²⁰.

Sebbene analizzando tutti i casi particolari sia possibile completare la figura in costruzione, dal momento che la prima figura costruita è molto più semplice, in quanto unione di due sole sotto-costruzioni, ho scelto di illustrare il presente problema mediante la figura interattiva già costruita.

¹⁹ La *macro* in questione è unione di tre *macro*, una delle quali dà esito solo se i punti iniziali giacciono su una circonferenza concentrica al cerchio iniziale.

²⁰ Nel caso in cui A e B giacciono entrambi su r , essi coincidono entrambi con i loro simmetrici rispetto a tale retta, pertanto occorre determinare le soluzioni del problema in modo diverso.

1.4 Problema XXIV

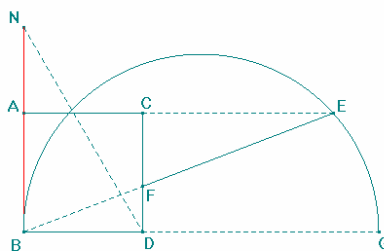
*Inserire nell'angolo retto EAF, un segmento dato EF, in modo che questo segmento esteso passi per un punto C, egualmente distante dalle due rette che comprendono l'angolo retto.*²¹

Di tale problema Newton presenta due diverse risoluzioni, e ne indica una terza. Più precisamente, determinato il punto medio G, del segmento EF (fig. 1), e posto $CB = CD = a$ e $EG = FG = b$, egli inizialmente sceglie come incognita $CG = x$, e riduce il problema all'equazione di quarto grado biquadratica $x^4 = \frac{2a^2}{+2b^2} \left\{ \begin{matrix} x^2 + 2a^2b^2 \\ -b^4 \end{matrix} \right.$, di cui scrive

²¹ Si tratta del *problema del quadrato*, noto anche come *problema (al modo) di Eraclito*. È un caso particolare del *problema del rombo*, presentato da Apollonio nelle sue *Inclinazioni*, e deve la sua denominazione al fatto che Eraclito, geometra non altrimenti noto, sicuramente antecedente Apollonio, pare ne abbia dato una soluzione diversa.

Nel terzo libro della *Géométrie*, Descartes espone un metodo che permette sia di stabilire se un problema ridotto ad un'equazione di IV grado è piano o solido, sia di ridurre l'equazione nel caso in cui il problema è piano, e, per corredare la sua spiegazione con un esempio, prende in esame proprio il *Problema di Eraclito*, trovato in Pappo.

Prima di applicare il suo metodo a tale problema, che esprime con la richiesta di prolungare il lato AC, di un dato quadrato AD, fino al punto E, in modo che EF sia uguale ad una linea data NB, egli ne espone la soluzione di Pappo, che consiste nel prolungare BD fino al punto G, in modo che DG sia uguale a DN, e nel determinare il punto cercato E, come intersezione del cerchio di diametro BG con la retta AC.



Osservato che tale soluzione si ottiene scegliendo DG come incognita, Descartes afferma poi che chiunque si proponga di risolvere tale problema senza avere familiarità con simili costruzioni, è indotto a scegliere come incognite CF o DF, ottenendo in tal modo, anche se più facilmente, un'equazione difficile da risolvere senza il suo metodo. Pertanto, posto $BD = CD = a$, $EF = c$, e scelta come incognita $DF = x$, riduce il problema all'equazione $x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$, e, applicando il suo metodo, mostra come

determinarne la soluzione $DF = x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2} - \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}}$. Assicurato infine che scegliendo come incognita BF, CE, o BE, si ottiene ancora un'equazione di IV grado, ma più semplice da risolvere, Descartes lascia al lettore il compito di appurare la veridicità della sua affermazione.

la sola soluzione $x = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}$ ²². E in seguito, posto $CD = a$ e $EF = b$, sceglie come incognita $CE = x$, e riconduce il problema all'equazione

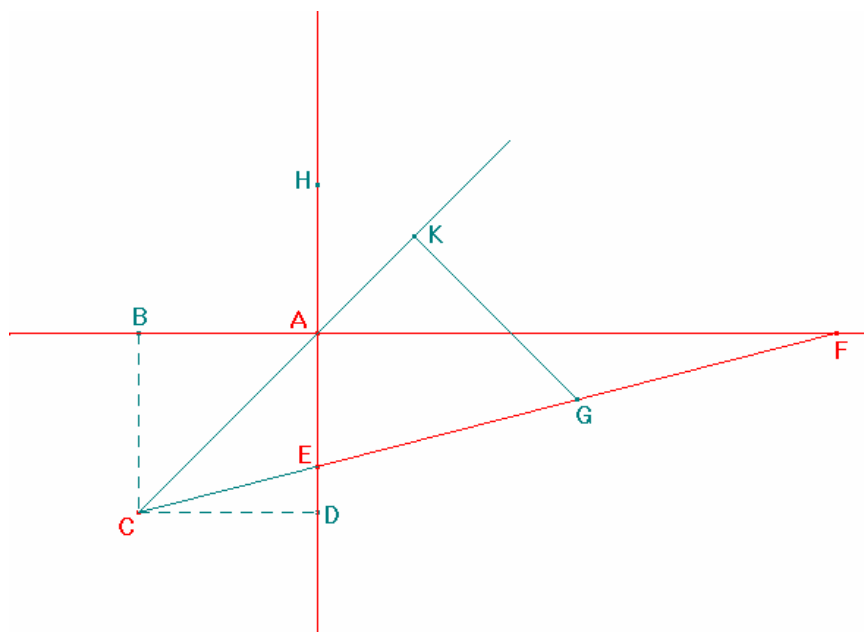
$$x^4 + 2bx^3 - 2a^2x^2 - a^2b^2 = 0, \text{ che riduce a } x^2 + bx - a^2 = \pm a\sqrt{a^2 + b^2}$$
²³.

Figura 1

Osservato poi, che il punto G giace sulla circonferenza del cerchio di centro A e raggio GE , egli conclude la risoluzione affermando che tracciata la perpendicolare GK alla retta AC , e posto $AK = y$, $AC = e$ e $EG = b$, si perviene all'equazione $y^2 = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}b^2$ ²⁴, che

²² In realtà, se $b > \sqrt{2}a$, l'equazione ammette un'altra radice positiva: $x = \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}$, corrispondente ad un segmento $E'F'$, inserito nell'angolo retto EAF , ma passante per il punto C .

²³ In effetti, il segmento CE che Newton ha scelto come incognita, ha lo stesso ruolo del segmento BF nella costruzione di Descartes (nota 21), quindi Newton ha svolto il compito che Descartes ha lasciato al lettore, di verificare che scegliendo come incognita BF si ottiene un'equazione di IV grado più semplice da risolvere, di quella determinata nella *Géométrie*.

²⁴ Paragrafo 5.9, nota 238.

permette di determinare AK , e quindi il punto G , come intersezione di KG con la circonferenza di centro A .

Nel *Quaestionum solutio geometrica*²⁵ Newton tratta geometricamente alcuni problemi relativi alle *Inclinazioni*²⁶, e in particolare risolve il problema del rombo, consistente nell'inserire in un angolo dato DAB , un segmento CB di lunghezza data, giacente su una retta passante per un punto dato P (fig. 2). Per risolvere tale problema, che ha come caso particolare il *Problema del quadrato*, egli determina un punto Q , tale che $PQ = CB$, sulla retta per P alla quale appartiene il segmento CB , come intersezione del cerchio di centro P e raggio CB , con l'iperbole descritta da Q al variare della lunghezza del segmento CB . Più precisamente, egli dapprima dimostra che il punto Q descrive una conica, osservando che tracciati i segmenti QR e PR , paralleli rispettivamente a AD e AB , si ha la proporzione $PD : DC (= AD - QR) = PR : QR$ ²⁷. E poi osserva che si tratta di un'iperbole, in quanto facendo tendere QR e PR all'infinito, dalle proporzioni $AD - QR : QR = PD : PR$ e $PD + PR : PR = AD : QR$ ²⁸, si deduce rispettivamente che, $PR = -PD$ e $QR = AD$, da cui segue che la retta AB e la retta per S parallela a AD (ove S è il punto di PD tale che $PS = PD$), sono asintoti della conica²⁹.

Tale costruzione potrebbe essere utilizzata per realizzare un disegno interattivo relativo al problema in esame, in quanto, disegnate AB e AD l'una perpendicolarmente all'altra (fig. 3), preso P sulla bisettrice dell'angolo formato da tali rette, e determinata l'iperbole

²⁵ *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. IV, pp. 260 – 261.

²⁶ Di tale trattato di Apollonio, purtroppo andato perduto, si conosce il contenuto in quanto fa parte, insieme ai trattati sulla *Sezione di un rapporto*, sulla *Sezione di un'area*, sulla *Sezione determinata*, sui *Contatti*, sui *Luoghi piani*, e ad alcune opere di Euclide, Aristeo ed Eratostene, di una raccolta dal titolo *Tesoro dell'Analisi*, anch'essa andata smarrita, di cui ci sono però pervenuti i sunti di Pappo.

²⁷ $AD - QR = DC$, in quanto i triangoli PQR e ACB sono isometrici, per il secondo criterio d'isometria. Inoltre, dalla proporzione $PD : DC (= AD - QR) = PR : QR$, si deduce che Q descrive una conica in quanto, nel sistema di riferimento cartesiano obliquo di origine P e assi PR e QR , il luogo descritto da Q è definito dall'equazione $PD \times QR = PR(DA - QR)$, ovvero dall'equazione $(PR + PD)(QR - DA) = -PD \times DA$. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. IV, p. 261, nota 35.

²⁸ Si ottiene applicando la proprietà del comporre alla prima proporzione.

²⁹ Sebbene nel disegno di Newton siano possibili due soluzioni, la seconda delle quali è corrispondente alla posizione di BC nell'angolo opposto al vertice di DAB , quando BC è sufficientemente grande, ci sono due ulteriori soluzioni, corrispondenti alla posizione di C al di sotto di D . *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. IV, p. 261, nota 38.

The diagram shows a coordinate system with a horizontal blue line and a vertical red line. A green dashed circle is centered at the origin. A smaller cyan dashed circle is centered at point P on the horizontal axis. A magenta dashed line passes through P. A solid blue curve (hyperbola branch) passes through P and Q. A solid green curve (hyperbola branch) passes through Q' and B'. A solid red line passes through A and B. A solid cyan line passes through C and C'. A solid green line passes through B' and C'. A solid blue line passes through T and P'. A vertical dashed green line passes through S. A horizontal dashed green line passes through C'.

[illegible]

Nella sezione del VII libro delle *Collezioni* di Pappo dedicata al I libro delle *Neusis*, tale problema è suddiviso in due problemi, l'ottavo e il nono³², di cui il primo è il problema (al modo) di Eraclito, ovvero del quadrato, e il secondo, è relativo al caso in cui il segmento di

³² *Pappus of Alexandria, Book 7 of the Collection*, Part 1, pp. 202–207.

lunghezza data passa per il vertice del rombo su cui si effettua la costruzione *neusis*. In particolare, nell'ottavo problema, che è preceduto da due lemmi³³, ed è seguito da una *sintesi*³⁴, si prevede l'inserimento di un segmento di lunghezza data Θ , tra i prolungamenti dei lati del quadrato $AB\Delta\Gamma$ (fig. 4), che non passi per il vertice B da cui è fatta la costruzione, invece nel nono problema, di cui è presentato solo un *diorisma* preceduto da un lemma³⁵, viene determinata la lunghezza minima del segmento Θ , affinché esso possa essere inserito passando per il vertice B .

Il lemma su cui si basa la dimostrazione del problema del quadrato afferma che, dato un quadrato $AB\Delta\Gamma$ (fig. 5), e disegnata una retta passante per B che incontra in H il lato $\Delta\Gamma$, e in E il prolungamento di $A\Gamma$, la retta per E perpendicolare alla precedente, incontra il prolungamento di $B\Delta$, in un punto Z tale che $\Gamma\Delta^2 + HE^2 = \Delta Z^2$.

³³ Il primo di tali lemmi costituisce solo un'osservazione supplementare.

³⁴ Nel VII libro delle sue *Collezioni*, dopo aver presentato il *Tesoro dell'Analisi* come una speciale risorsa dedicata a chi, dopo aver studiato gli *Elementi*, voleva acquisire la capacità di risolvere problemi geometrici riguardanti le curve, Pappo descrive in modo completo il metodo usato dagli autori di tale opera, ossia il *metodo analitico*, che è basato su *analisi* (che può essere *teorematica* o *problematica*, a seconda che con essa si cerchi una verità o di ottenere come *dato* ciò che è richiesto), e *sintesi*. Più precisamente, l'*analisi* consiste nel determinare una serie di conseguenze, a partire da ciò che si cerca, fino a giungere alla premessa o ad una sua nota conseguenza (in tal modo, se si arriva ad ammettere qualcosa di impossibile, anche il problema è impossibile), la *sintesi* consiste nell'invertire il percorso per ottenere una dimostrazione valida. È opportuno osservare che, sebbene l'invertibilità del percorso dimostrativo sia possibile solo se i suoi passi sono costituiti da condizioni necessarie e sufficienti, l'applicazione del *metodo analitico* prevede lo studio della *determinatio* del problema, ossia lo studio delle condizioni di risolubilità, che non sono altro che le condizioni che garantiscono l'invertibilità del percorso. Infine, nel metodo analitico si chiama *diorisma*, la discussione preliminare relativa a quando, come e in quanti modi può essere risolto un dato problema. *Pappus of Alexandria, Book 7 of the Collection*, Part 1, pp. 66, 67.

³⁵ Il lemma al *diorisma*, è attribuito da Pappo agli antichi, inoltre la dimostrazione del *diorisma* è dello stesso Pappo, e ciò suggerisce che Apollonio può averlo considerato ovvio, o averne dato una diversa dimostrazione.



■ gli angoli $\angle E\Theta$ e $\angle ZEH$ sono entrambi retti, pertanto l'angolo $\angle E\hat{H}$, ovvero l'angolo $\angle BH$ ³⁶, è uguale all'angolo $\angle ZE\Theta$ ³⁷;

³⁷ È dovuto al fatto che gli angoli \widehat{ZEO} e $\widehat{\Gamma EH}$, sono uguali perchè complementari dello stesso angolo \widehat{BEO} .

affermare che essendo noti $\Gamma\Delta$ e ZE , lo è anche ΔH , e di conseguenza BH . Pertanto, essendo BH dato anche di posizione, tale è il semicerchio BEH , e poiché anche AE è dato di posizione, tale è il punto E , e di conseguenza il punto B , e quindi BE .

La *sintesi*, consiste nell'osservare che dato un quadrato $A\Delta$, una linea Θ , e preso ΔH tale che $\Delta H^2 = \Gamma\Delta^2 + \Theta^2$, si ha che $H\Delta$ è maggiore di $\Delta\Gamma$, pertanto $H\Delta \cdot \Delta B > \Delta\Gamma^2$. Da tale disuguaglianza segue infatti che il semicerchio su BH cade oltre il punto Γ , pertanto disegnato il punto d'intersezione E , di AE con il semicerchio di diametro BH , poiché per il lemma precedente $\Delta H^2 = \Gamma\Delta^2 + ZE^2$, si ha che Θ eguaglia EZ , e dal momento che Θ è dato, risolve il problema⁴⁴.

Per quanto riguarda il lemma che precede il *diorisma* del nono problema, esso afferma sostanzialmente che, dato un triangolo isoscele $BA\Gamma$ (fig. 6), e detto Δ il punto medio della sua base $B\Gamma$, ogni segmento passante per Δ intercetta tra i lati del triangolo, eventualmente prolungati, un segmento maggiore di $B\Gamma$. Disegnato EZ , e prolungato AB fino a Z , la dimostrazione di tale lemma è basata sulla possibilità di prendere nell'angolo Γ , l'angolo $\Delta\Gamma H$ uguale all'angolo BZE , dovuta al fatto che $AB\Gamma (= B\Gamma\Delta)$ è maggiore dell'angolo BZE ⁴⁵. In tal modo infatti, si ha la proporzione $Z\Delta : \Delta B = \Gamma\Delta : \Delta H$ ⁴⁶, dalla quale, poiché $Z\Delta$ è maggiore di ΔB ⁴⁷, si deduce che $\Gamma\Delta (= B\Delta)$ è maggiore di ΔH , e quindi che $Z\Delta$ è maggiore di ΔH , da cui segue che $B\Gamma$ è minore di ZH ⁴⁸, e quindi di EZ . Disegnata inoltre un'altra linea ΘK , e dimostrato con un procedimento analogo al precedente che EZ è

⁴⁴ Nella *sintesi*, viene inoltre dimostrato che la soluzione è unica, e che tra due segmenti uscenti da B , il più piccolo è quello più vicino a Γ . Più precisamente, disegnata un'altra linea BA (fig. 4), l'unicità della soluzione segue dal fatto che se anch'essa risolvesse il problema, NA dovrebbe essere uguale a EZ , ma poiché ZB è maggiore di NB , BA dovrebbe essere minore di BE , e ciò è assurdo. Inoltre, poiché ΛB è maggiore di BE , e BZ lo è di BN , allora NA è maggiore di ZE , pertanto la linea più vicina a Γ è sempre minore dell'altra.

⁴⁵ L'angolo $AB\Gamma$ è esterno al triangolo BZA , pertanto $AB\Gamma = BZE + B\Delta Z$.

⁴⁶ Si ottiene dalla similitudine dei triangoli $ZB\Delta$ e $\Delta H\Gamma$, dovuta al primo criterio.

⁴⁷ In quanto $Z\Delta > B\Delta$.

⁴⁸ Poiché $B\Delta$ è uguale a ΔZ , dalla proporzione segue che $Z\Delta \cdot \Delta H = B\Delta^2$, pertanto $ZH = Z\Delta + \Delta H = Z\Delta + \frac{B\Delta^2}{Z\Delta} = \frac{Z\Delta^2 + B\Delta^2}{Z\Delta} \geq \frac{2Z\Delta \cdot B\Delta}{Z\Delta} = 2B\Delta = B\Gamma$

minore di ΘK , si ottiene che $B\Gamma$ è la minore di tutte le linee rette passanti per Δ , e che la più vicina ad esso è sempre minore delle altre.

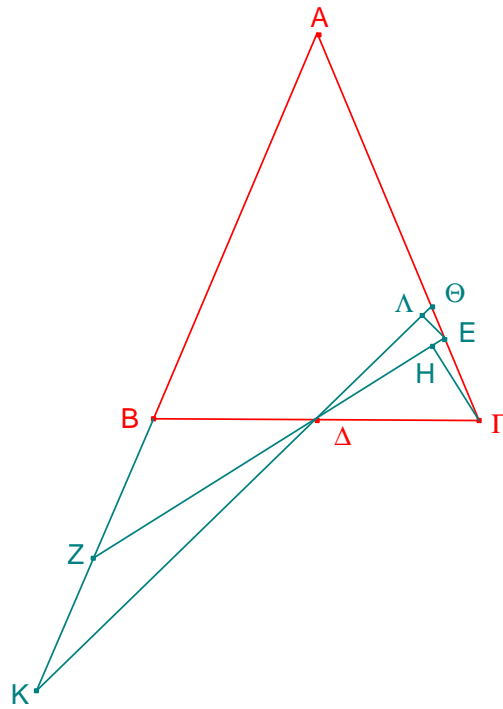


Figura 6

Infine, il *diorisma* al nono problema, che Pappo afferma essere ovvio, consiste nell'osservare che, disegnato un rombo $AB\Gamma\Delta$, ed EZ perpendicolare ad $A\Delta$ (fig. 7), si ottiene un triangolo isoscele EAZ , pertanto, per il lemma precedente, EZ è minore di tutte le linee passanti per Δ e la più vicina ad esso è minore delle altre.

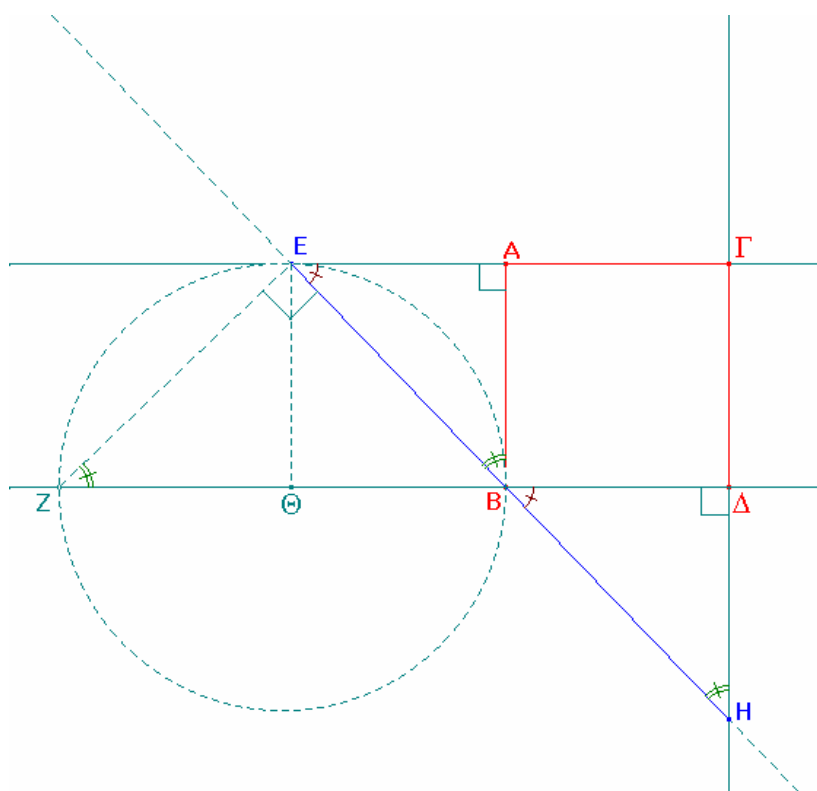


Figura 8

Più precisamente, dopo aver disegnato una **retta** r , passante per un **punto** Γ , e la **retta perpendicolare** s , a r , passante per Γ (fig. 9), ho disegnato la **bisettrice** b , dell'angolo formato dalle due rette⁵¹ e ho fissato un **punto** B su di essa. Per completare la costruzione degli oggetti che costituiscono i dati iniziali del problema, ho poi disegnato una **semiretta** di origine Q , e un **segmento** QP su di essa, che rappresenta il segmento da inserire nell'angolo formato dalle rette r e s . Fatto ciò, ho condotto da B le **rette perpendicolari** t e h , alle rette r e s , e, dopo aver disegnato i loro **punti d'intersezione** A e Δ , con tali rette, ho **riportato** il segmento QP sul punto B , individuando così il **punto** T sulla retta t . Determinato poi, il **punto d'intersezione** H , del **cerchio** di centro Δ passante per T , con h , ho disegnato il **punto medio** M , dei punti B e H , e quindi il **punto d'intersezione** E , del **cerchio** di centro M passante per B , con la retta r , che rappresenta un punto della retta per B che intercetta tra le rette r e s , un segmento uguale a QP . Disegnata la **retta** BE , ho allora determinato il **punto d'intersezione** Z , di tale retta con la retta s , e ho completato la prima

⁵¹ Per disegnare b ho fissato un **punto** R sulla prima retta, e un **punto** S sulla seconda.

parte della costruzione disegnando il **segmento** EZ , e il **segmento** $E'Z'$, intercettato tra le rette r e s , dalla retta **simmetrica** alla retta BE , rispetto alla retta b .

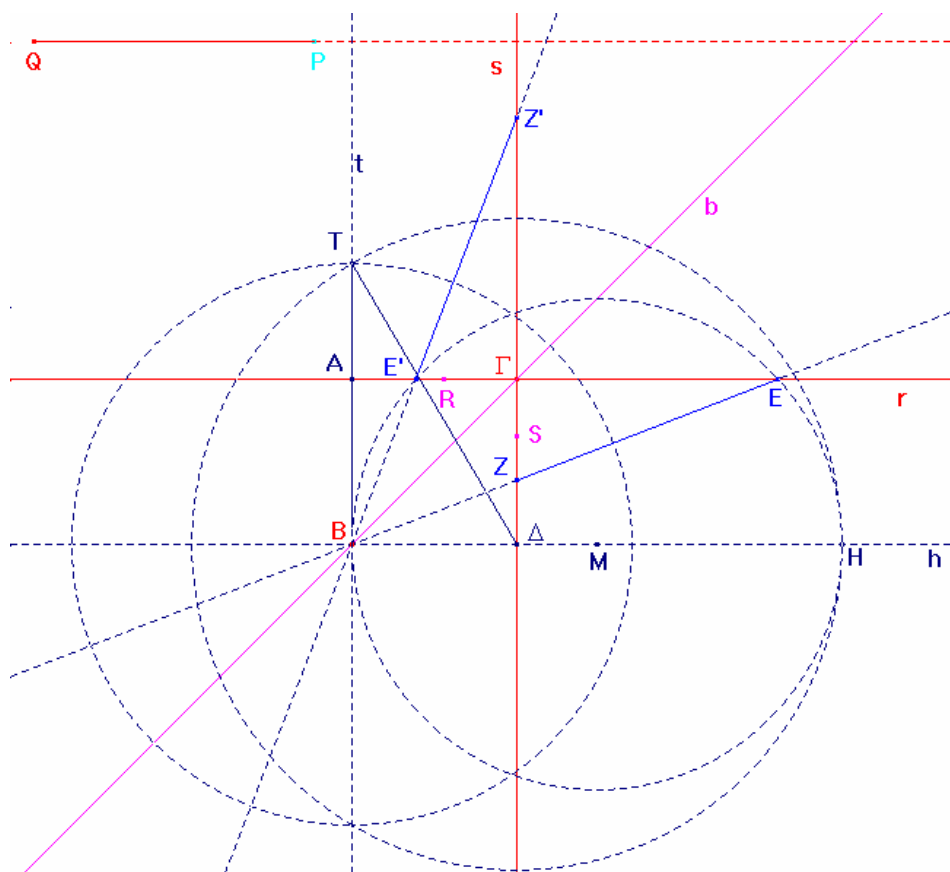


Figura 9

Per eseguire la seconda parte della costruzione, e disegnare le due rette passanti per B , che intercettano tra r e s un segmento uguale al segmento QP , ho poi disegnato l'ulteriore **punto d'intersezione** H' , del cerchio di centro Δ passante per T (fig. 10), con h , il **punto medio** M' , dei punti B e H' , i **punti d'intersezione** E'' e E''' , del **cerchio** di centro M' passante per B , con la retta r , le **rette** BE'' e BE''' , e infine i **segmenti** $E''B''$ e $E'''B'''$, da esse intercettati tra le rette r e s , che sono uguali a QP .

Nel caso in cui il segmento QP ha lunghezza minore del **segmento** GO , intercettato tra r e s dalla **retta perpendicolare** a b , passante per B (fig. 11), i punti E'' e E''' non esistono. Per

rendere palese che l'esistenza delle soluzioni del problema rappresentate dai segmenti $E''B''$ e $E'''B'''$, dipende dalla lunghezza del segmento QP , ho **riportato** tale segmento sul punto Q , e ho così individuato il **punto** V sulla semiretta QP . In tal modo infatti, è evidente che il problema in esame ammette due soluzioni se P giace a sinistra del punto V , e quattro se giace dalla parte opposta.

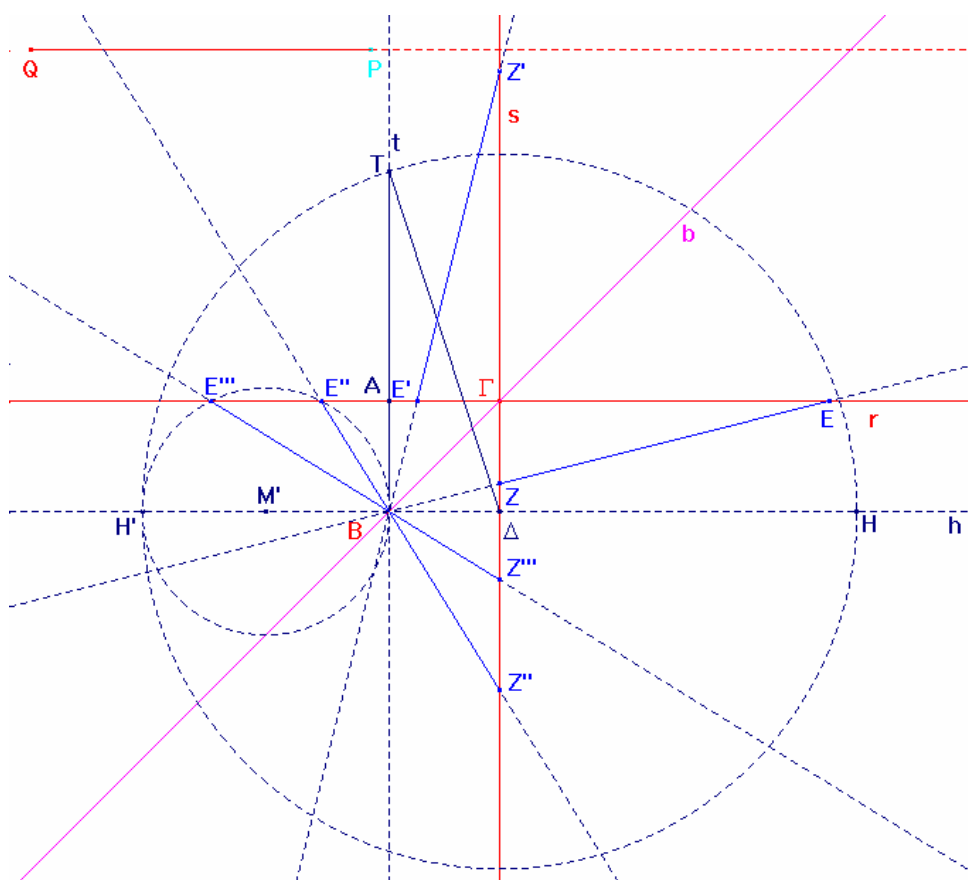


Figura 10



1.5 Problema XXVII

Trovare un punto D tale che, se da questo punto si conducono tre segmenti DA , DB , DC , per tre punti dati A , B , C , questi segmenti siano tra loro in un rapporto dato.

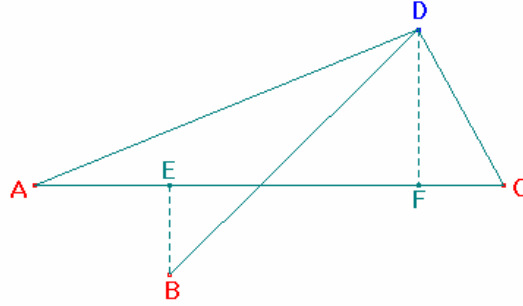


Figura 1

Condotte le perpendicolari BE e DF , alla retta AC , e scelte come incognite $AF = x$ e $FD = y$, Newton pone, in accordo con i *DATI* di Euclide, $AE = a$, $AC = b$, $EB = c$, $\frac{AD}{CD} = \frac{d}{e}$ e $\frac{AD}{BD} = \frac{d}{f}$, e riduce il problema al sistema di secondo grado:

$$\begin{cases} x^2 = 2sx - tb \\ 2mx + 2cn = 2cy \end{cases} \quad (\Delta)^{52},$$

di cui scrive entrambe le soluzioni $\begin{cases} x = s \pm \sqrt{s^2 - tb} \\ y = \frac{mx}{c} + n \end{cases}$.

In effetti, poiché al variare della disposizione degli oggetti che costituiscono i dati iniziali del problema, variano anche le espressioni di FC e EF , in funzione dei termini noti e delle incognite, il problema in esame ammette più sistemi risolvanti, di cui (Δ) è quello

⁵² Dove, per brevità ha posto: $p = \frac{d^2 - e^2}{d}$, $q = \frac{d^2 - f^2}{d}$, $m = a - \frac{bq}{p}$, $2cn = \frac{b^2q}{p} - a^2 - c^2$, $\frac{b}{r} = \frac{p}{d} + \frac{pm^2}{dc^2}$, $\frac{sb}{r} = b - \frac{pmn}{dc}$ e $\frac{tb^2}{r} = b^2 + \frac{pn^2}{d}$.

corrispondente alla configurazione rappresentata nella figura cui si riferisce Newton nella sua risoluzione.

Per realizzare un disegno interattivo relativo al problema in esame, dopo aver stabilito la relazione tra le diverse configurazioni e i relativi sistemi risolvitori, si possono individuare le soluzioni del problema con l'ausilio della calcolatrice interattiva. Vi è però un'alternativa molto più semplice che consiste nel determinare i punti soluzione come intersezione di due luoghi geometrici, e consente sia di pervenire all'individuazione di entrambe le soluzioni del problema, sia di visualizzare in quali casi il problema non ammette soluzioni. Più precisamente, dati due punti U e V , il luogo dei punti T , tali che il rapporto di UT su VT sia fissato, è un luogo noto come *Cerchio di Apollonio*, pertanto i due punti D che soddisfano le condizioni del problema, sono i punti d'intersezione del cerchio di Apollonio individuato dai punti A e C , in corrispondenza al rapporto di AD su CD , con il cerchio di Apollonio individuato dai punti A e B , in corrispondenza al rapporto di AD su BD ⁵³.

Per eseguire la costruzione con *CABRI*, e realizzare un disegno interattivo relativo al problema in esame, dopo aver disegnato tre **punti** A , B e C (fig. 2), ho disegnato un **segmento** QV , avente l'estremo V mobile sulla **semiretta** QV , per rappresentare il rapporto di AD su CD , e un **segmento** TP , avente l'estremo P mobile sulla **semiretta** TP , per rappresentare il rapporto di AD su BD .

⁵³ *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. V, p. 233, nota 289

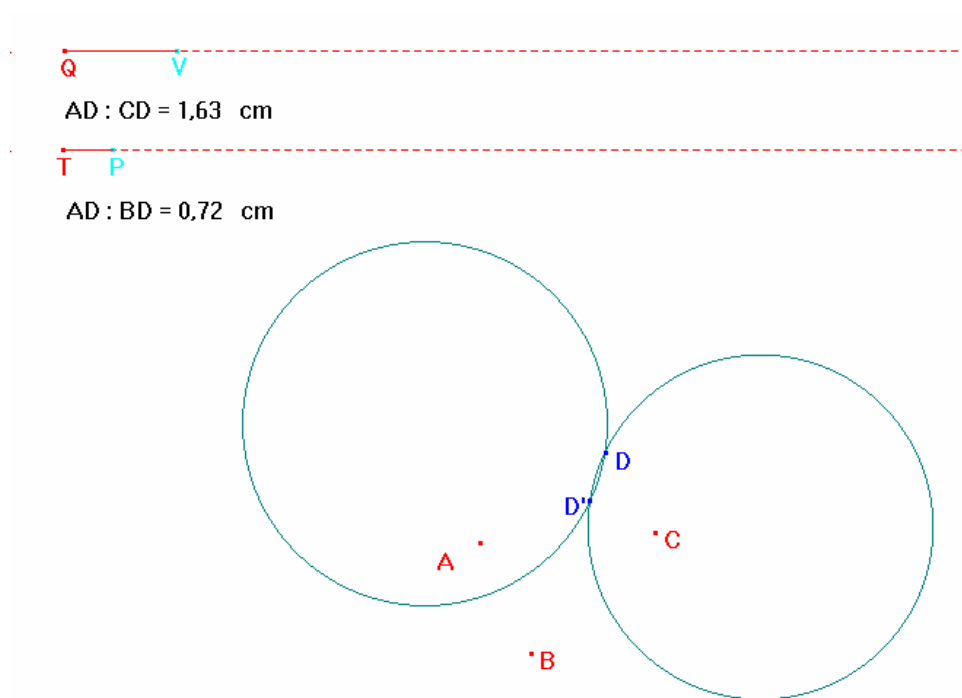


Figura 2

Fatto ciò, ho applicato la *macro* **Cerchio di Apollonio**⁵⁴, rispettivamente ai punti *A* e *C*, e al segmento *QV*, e ai punti *A* e *B* e al segmento *TP*, e ho poi determinato i due **punti** *D* e *D'*, che soddisfano le condizioni del problema, come intersezione dei due cerchi determinati con l'ausilio della *macro*.

Nel disegno interattivo, oltre a comparire entrambe le soluzioni del problema, sono presenti anche i due cerchi di Apollonio, in quanto permettono di stabilire quando il problema non ammette soluzioni, inoltre ho inserito una casella di testo per indicare quali sono gli oggetti mobili e come possono essere spostati (fig. 3).

⁵⁴ Paragrafo 3.5, Problema XXXIX.

1.6 Problema XLIII

Descrivere un cerchio che passi per due punti dati, e che tocchi una retta data di posizione.

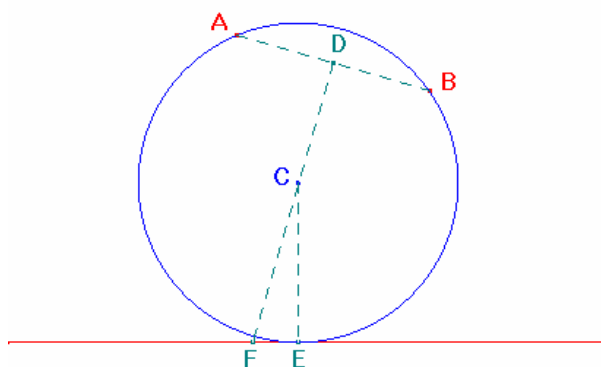


Figura 1

Per risolvere il problema, dopo aver disegnato i punti dati A e B , la retta data EF , e il cerchio cercato AEB , di centro C , Newton disegna il punto medio D dei punti A e B , e il punto d'incontro F della retta data con la retta passante per D e perpendicolare al segmento AB (fig. 1). Successivamente, scelta come incognita la lunghezza del segmento $DC = x$, e posto $DB = a$, $DF = b$ e $\frac{CF}{CE} = \frac{d}{e}$, determina le espressioni algebriche di CB e CE , coinvolgenti i termini noti e l'incognita, e, dal momento che essi sono raggi dello stesso cerchio, ottiene l'equazione risolvibile del problema eguagliando i loro quadrati:

$$(d^2 - e^2)x^2 + 2be^2x + a^2d^2 - b^2e^2 = 0 \quad (\clubsuit).$$

Scritta la sola soluzione:

$$CD = x = \frac{-be^2 + d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2},$$

conclude poi la risoluzione del problema affermando che, noto CD , e quindi il centro C del cerchio cercato, da tale punto con un'apertura di compasso uguale a CB , si può descrivere un cerchio che passa per i punti A e B , e tocca la retta FE .

In realtà, il problema in esame ammette in generale due soluzioni, tuttavia, poiché l'ulteriore cerchio che risolve il problema ha centro C' sulla semiretta opposta alla semiretta DF (fig. 2), il segmento $C'D$ non è soluzione dell'equazione (\clubsuit) , ma

dell'equazione $(d^2 - e^2)x^2 - 2be^2x + a^2d^2 - b^2e^2 = 0$, in quanto, la lunghezza di $C'F$ non è uguale alla differenza delle lunghezze dei segmenti DF e DC' , bensì alla loro somma, ossia $C'F = DF + DC' = b + x$.

Dal momento che questa seconda equazione differisce dalla prima solo per il segno del coefficiente del termine di primo grado, le due equazioni hanno radici opposte. Pertanto,

$$C'D = \frac{be^2 + d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}, \text{ ossia è uguale al valore assoluto della radice,}$$

dell'equazione (\clubsuit), che Newton non ha considerato.

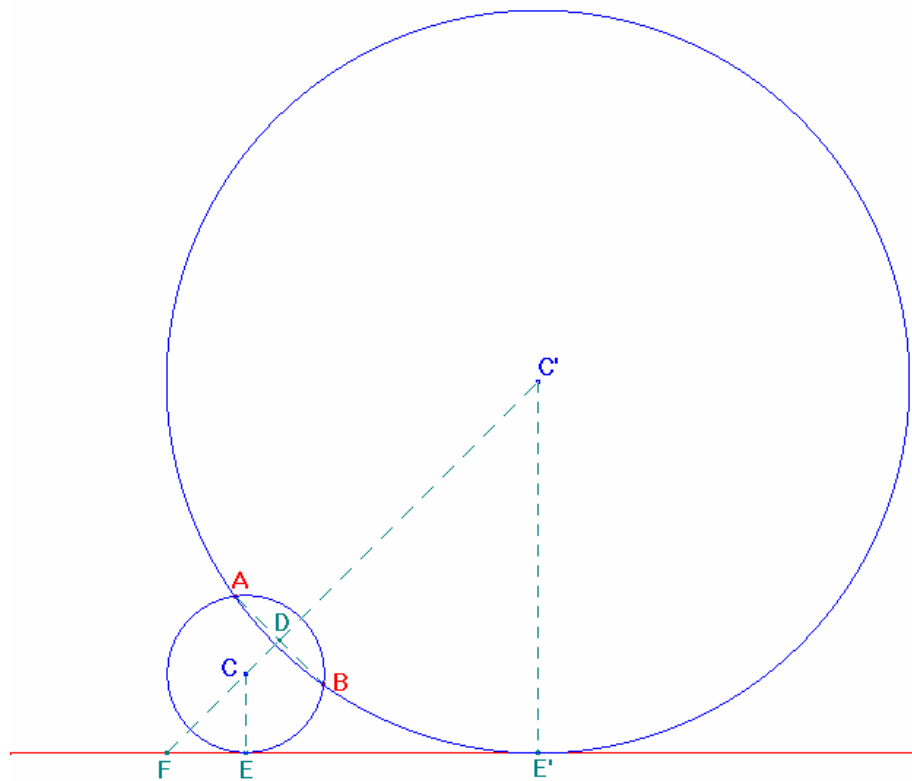


Figura 2

In una delle note esplicative che accompagnano la sua traduzione dell'*Arithmetica Universalis*, Noel Beaudoux mostra come costruire geometricamente un segmento di

lunghezza uguale alla soluzione $CD = x = \frac{-be^2 + d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}$.⁵⁵

Tale costruzione si divide in due passi, consistenti rispettivamente nella costruzione della parte radicale e della parte razionale dell'incognita x . In particolare, per costruire

$\frac{d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}$, prolungato BD affinché incontri EF e chiamato H il punto di

intersezione (fig. 3), dalla similitudine dei triangoli FCE e FDH , egli deduce la proporzione:

$$FC : CE :: d : e :: FH : HD^{56},$$

da cui, supposto $FH = d$, ottiene $HD = e$.

Disegnato poi, il semicerchio HKD , di diametro DH (fig. 4), in cui inscrive la corda

$HK = DB = a$, afferma che $DK = \sqrt{DH^2 - HK^2} = \sqrt{e^2 - a^2}$.⁵⁷

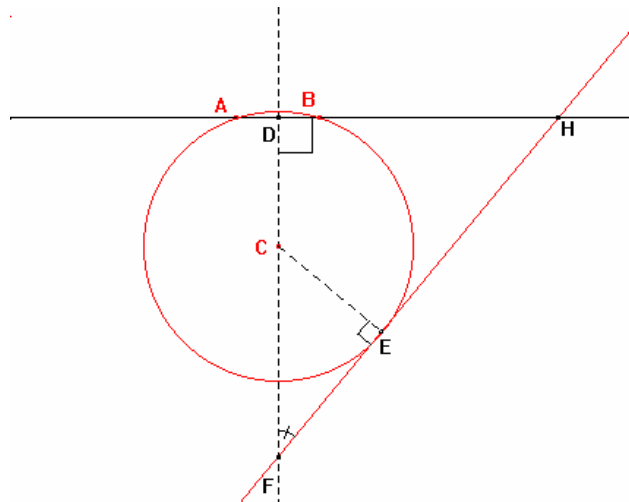


Figura 3

⁵⁵ *Arithmétique Universelle*, Tomo II, note 60, p.170.

⁵⁶ I triangoli FCE e FDH sono simili, per il primo criterio di similitudine, in quanto sono rettangoli e hanno un angolo in comune.

⁵⁷ Poiché il triangolo DKH è rettangolo, in quanto inscritto in una semicirconferenza, è possibile applicare ad esso il teorema di Pitagora.

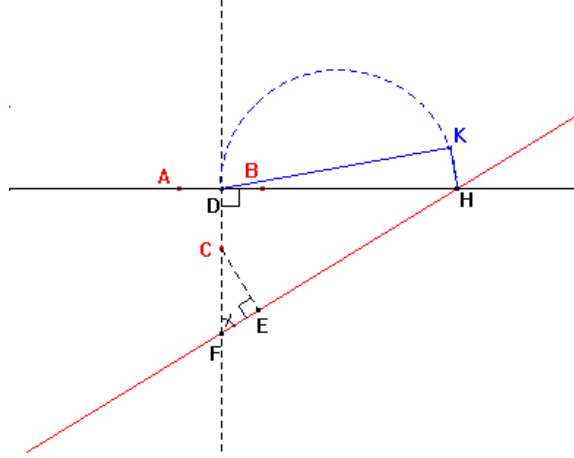


Figura 4

Riportato inoltre, DK su DF e ottenuto così il punto O (fig. 5), egli traccia da questo punto la parallela a DH , chiama P il punto di incontro di tale retta con EF , e scrive la proporzione:

$$DF : FH :: DO(= DK) : PH \text{ }^{58} \text{ ovvero } b : d :: \sqrt{e^2 - a^2} : PH ,$$

da cui ricava:

$$PH = \frac{d\sqrt{e^2 - a^2}}{b} = \frac{db\sqrt{e^2 - a^2}}{b^2} = \frac{d\sqrt{b^2e^2 - a^2b^2}}{b^2} .$$

E, osservato che $\overline{FH}^2 - \overline{DH}^2 = \overline{FD}^2$, ovvero che $d^2 - e^2 = b^2$, e sostituita a b^2 l'espressione $d^2 - e^2$, sia nel secondo termine del radicale, sia nel denominatore, ottiene:

$$PH = \frac{d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}$$

ossia la parte radicale dell'incognita x .

Tracciata poi, dal punto H , la perpendicolare ad FE e chiamato L il punto d'incontro di tale perpendicolare con la retta FD (fig. 6), egli ottiene la proporzione:

$$FD(=b) : DH(=e) :: DH(=e) : DL \text{ }^{59}$$

da cui ricava:

⁵⁸ Per un corollario del teorema di Talete, ogni retta che interseca due lati di un triangolo ed è parallela al terzo lato, determina sui primi due segmenti proporzionali.

⁵⁹ Per il secondo teorema di Euclide, applicato al triangolo LHF , che è rettangolo in H , DH è medio proporzionale tra LD e DF .

$$DL = \frac{e^2}{b} = \frac{be^2}{b^2} = \frac{be^2}{d^2 - e^2}$$

ovvero la parte razionale di x .

E infine, riportando PH da L in C , ottiene:

$$CD = CL - DL = PH - DL = \frac{-be^2 + d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2} = x,$$

completando così la costruzione.

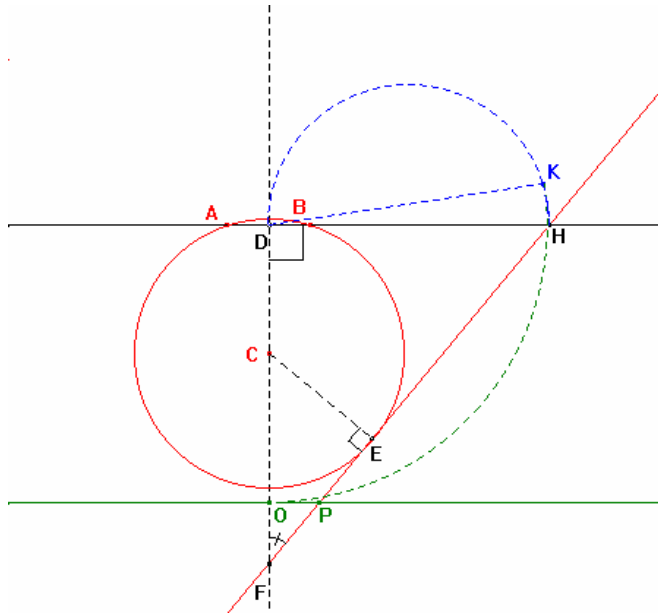


Figura 5

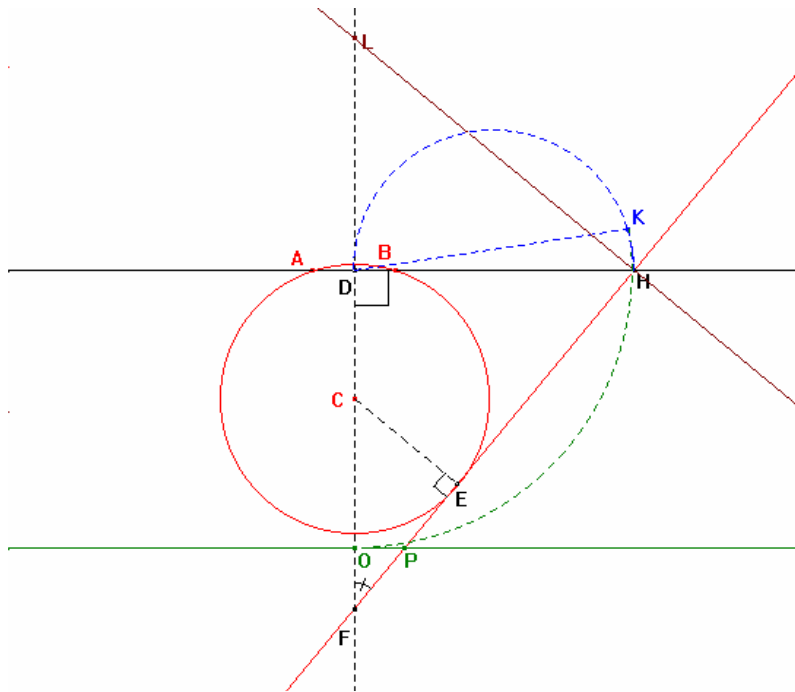


Figura 6

Sebbene neppure Beaudeau accenni alla seconda radice dell'equazione risolvete, per

costruire $C'D = \frac{be^2 + d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}$ e ottenere il secondo cerchio che soddisfa le

condizioni del problema è sufficiente costruire

$C'D = C'L + DL = PH + DL = \frac{+be^2 + d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}$, riportando PH sulla

semiretta opposta alla semiretta DL .

Questa costruzione è di facile realizzazione, tuttavia, la soluzione geometrica proposta dallo stesso Newton, nel Problema I del *Quaestionum Solutio Geometrica*⁶⁰, è molto più semplice, non comporta l'introduzione di incognite e soprattutto consente di determinare entrambi i cerchi che risolvono il problema.

Più precisamente, detti A e B i punti dati, e EF la retta data (fig. 7), Newton suppone di conoscere il cerchio cercato e, indicato con E il punto di contatto di tale cerchio con la retta data EF , e con G il punto di incontro della retta AB con la retta EF , osserva che il segmento EG è medio proporzionale tra AG e BG . Pertanto, determinato EG , per ottenere i punti di

⁶⁰ *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. IV, pp. 254 – 255.

contatto dei due cerchi cercati con la retta data, è sufficiente riportarlo su EF , da parti opposte rispetto a G .

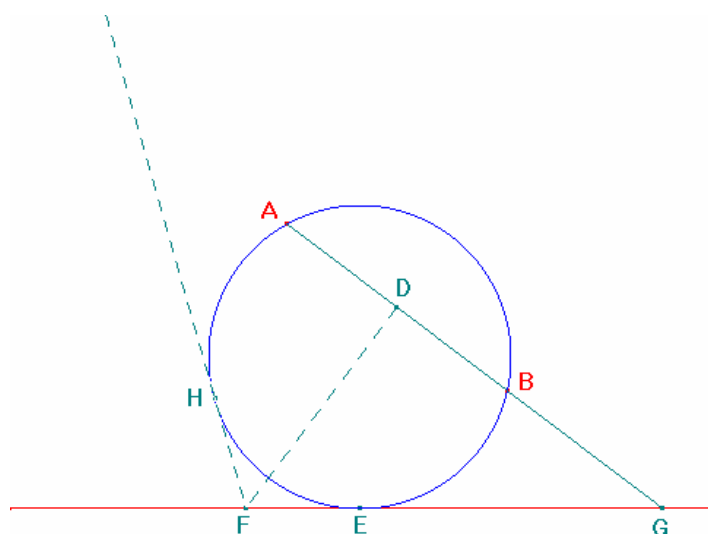


Figura 7

Per eseguire la costruzione con *CABRI*, al fine di realizzare un disegno interattivo, dopo aver disegnato due **punti** A e B , e una **retta** r (fig. 8), ho disegnato la **retta** s , passante per i punti A e B , e il punto d'**intersezione** G , di tale retta con r . Individuato poi, il **simmetrico** B' , del punto B rispetto al punto G , per determinare il segmento medio proporzionale tra AG e BG , ho disegnato il **punto medio** M , di A e B' , il **cerchio** di centro M passante per A , avente il segmento AB' come diametro, e il **punto di intersezione** H , di tale cerchio con la **retta perpendicolare** alla retta s , passante per G . Poiché il triangolo AHB' è rettangolo in quanto inscritto in un semicerchio, per il secondo teorema di Euclide, il segmento GH è medio proporzionale tra AG e $GB' = GB$. Pertanto, per individuare i punti di contatto E ed E' , dei cerchi cercati con la retta r , ho **riportato** il segmento GH sulla retta r , da parti opposte rispetto a G , mediante il **cerchio** di centro G passante per H .

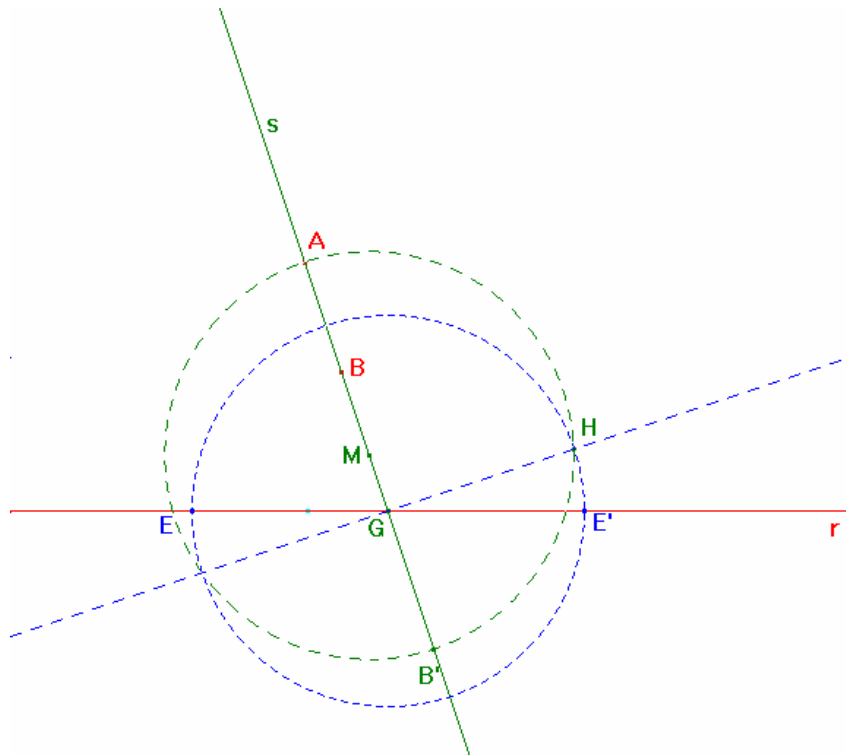


Figura 8

Fatto ciò, per determinare i cerchi, ABE e ABE' , che soddisfano le condizioni del problema, ne ho individuato i centri C e C' (fig. 9), come **intersezione** dell'**asse** del segmento AB , rispettivamente con gli **assi** dei segmenti BE e AE' , e ho poi disegnato i **cerchi** di centro C e C' passanti per A .

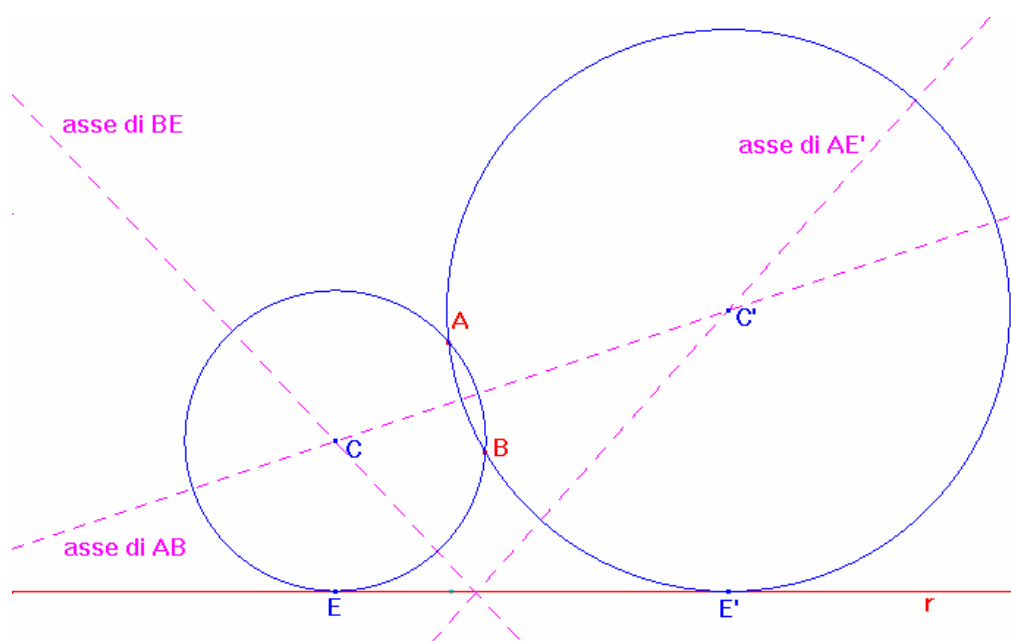


Figura 9

Analizzando la figura ottenuta per verificarne la correttezza, ho tuttavia appurato che quando uno dei due punti, A o B , giace sulla retta r , o quando la retta passante per A e B è parallela a r , la costruzione dà luogo a cerchi errati oppure a nessun cerchio. Nel primo caso, ciò è dovuto al fatto che i punti G , H , E e E' coincidono con il punto che giace su r , pertanto uno degli assi dei segmenti AE' o BE , coincide con l'asse del segmento AB , mentre l'altro non esiste. Nel secondo caso, ciò è dovuto alla non esistenza del punto G .

Per poter ovviare a tali inconvenienti, ho invalidato la costruzione dei cerchi finali errati nella figura costruita e ho analizzato separatamente i casi sopraindicati, costruendo i cerchi che risolvono il problema nelle configurazioni corrispondenti. Poi, ho creato delle *macro* relative a ciascuna delle figure così costruite, e infine, applicando tali *macro* simultaneamente, ho ottenuto una figura interattiva che illustra esaurientemente il problema in esame.

Più precisamente, dal momento che un punto appartiene a una retta se ha distanza nulla da essa, per invalidare la costruzione dei cerchi errati, ho determinato le **distanze** d_1 e d_2 , di A e B da r , e, r_1 e r_2 , dei centri C e C' dalle circonferenze dei cerchi ABE e ABE' (fig. 10),

e ho **calcolato** le quantità $n_i = \frac{d_1 \times d_2 \times r_i}{d_1 \times d_2}$ con $i = 1, 2$, che sono uguali a r_1 o r_2 , se né A né

B appartengono a r , e sono inesistenti altrimenti. **Trasportando** tali quantità su C e C' , ho poi individuato due punti U e U' , e quindi ho disegnato i **cerchi** γ e γ' , di centri C e C' passanti per essi, che coincidono con le soluzioni del problema se A e B non appartengono a r , e non esistono né nel caso contrario, né nel caso in cui la retta AB è parallela a r .

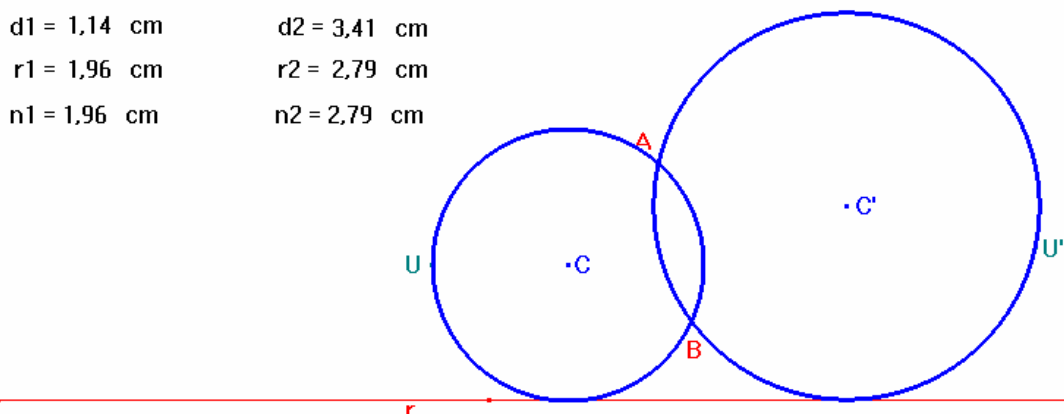


Figura 10

Infine, **nascosti** i centri C e C' , che vengono visualizzati anche quando i cerchi γ e γ' non appaiono, evidenziando i punti A e B , e la retta r come oggetti iniziali, e i due cerchi γ e γ' come oggetti finali, ho definito la *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta – I**, che è relativa alla figura costruita.

Per costruire l'unico cerchio che risolve il problema nel caso in cui uno dei punti giace sulla retta, ho disegnato, su un nuovo foglio di *CABRI*, un **punto** A , una **retta** r , un **punto** B su di essa (fig. 11), e, dopo aver determinato il **punto d'intersezione** C , dell'asse dei punti A e B con la **retta perpendicolare** a r , passante per B , ho disegnato il **cerchio** \mathcal{C} , di centro C passante per A , che per come è stato costruito, è tangente in B alla retta r .

Malgrado spostando i punti A e B , e la retta r , tale figura dia sempre luogo a un cerchio che soddisfa le condizioni del problema, evidenziando nell'ordine A , B , e r come oggetti iniziali, e \mathcal{C} come oggetto finale, si ottiene una *macro* relativa al caso particolare della determinazione di un cerchio passante per un punto e tangente una retta in un suo punto, che dà luogo a un cerchio errato se il secondo punto evidenziato non appartiene alla retta.

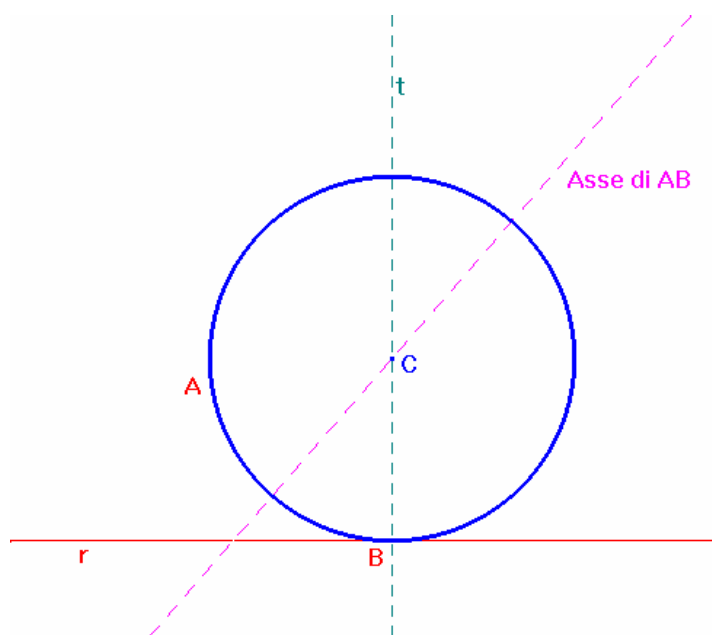


Figura 11

Per ovviare all'inconveniente, e invalidare anche in tal caso la costruzione di cerchi errati, ho creato una *macro* che permette di stabilire se una retta e un cerchio sono tangenti, mediante la visualizzazione di un numero che è uguale a 1 in caso di risposta affermativa ed è inesistente in caso contrario. Più precisamente, dal momento che una retta e un cerchio sono tangenti se il cerchio ha raggio uguale alla distanza del suo centro dalla retta, dopo aver disegnato, in un nuovo foglio di *CABRI*, un **cerchio** di centro *C*, e una **retta** *s* (fig. 12), ho **misurato** le distanze *d* e *r*, del punto *C* da *s*, e dalla circonferenza del cerchio, e ho

calcolato la quantità $\frac{\ln(10^{-5} - |d - r|)}{\ln(10^{-5} - |d - r|)}$. Poiché tale quantità è uguale a 1, se il cerchio e la

retta sono tangenti, ed è inesistente in caso contrario, ho definito la *macro* che ho chiamato **Cerchio e retta tangenti?**, evidenziando il cerchio di centro *C* e la retta *s* come oggetti

iniziali, e il numero $\frac{\ln(10^{-5} - |d - r|)}{\ln(10^{-5} - |d - r|)}$ come oggetto finale.

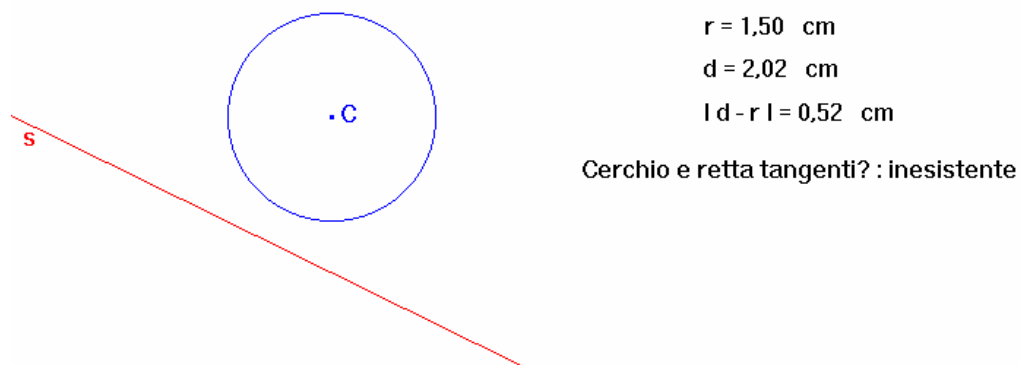


Figura 12

Dopo aver applicato tale *macro* alla retta r e al cerchio \mathcal{C} , nella figura relativa alla costruzione del cerchio che soddisfa le condizioni del problema, nel caso particolare in cui uno dei punti giace sulla retta (fig. 13), ho **misurato** la distanza d , di C dalla circonferenza di \mathcal{C} , e ne ho **calcolato** il prodotto con l'esito della *macro*. **Trasportando** il risultato su C , ho poi determinato un punto Q , e quindi il **cerchio** Γ , di centro C passante per Q , che esiste soltanto se il punto B giace su r .

Pertanto, dopo aver **nascosto** C , che appare anche se B non giace su r , evidenziando nell'ordine A , B , e r , come oggetti iniziali, e il cerchio Γ come oggetto finale, ho ottenuto una *macro*, che ho chiamato **Cerchi per due punti tangenti una retta – II**, relativa al caso in cui uno dei due punti giace sulla retta, che funziona correttamente solo se il secondo punto evidenziato giace sulla retta, e non dà soluzioni in caso contrario.

Dal momento che l'uso della *macro* **Cerchio e retta tangenti?** è finalizzato alla costruzione dei soli cerchi che sono tangenti a una retta, per non ripetere la costruzione che segue alla sua applicazione, evidenziando il cerchio \mathcal{C} e la retta r come oggetti iniziali, e il cerchio Γ come oggetto finale, ho definito la *macro* **Cerchio soltanto se tangente retta**, che evidenziati un cerchio e una retta dà luogo a un cerchio, sovrapposto al primo, solo se il cerchio e la retta evidenziati sono tangenti.

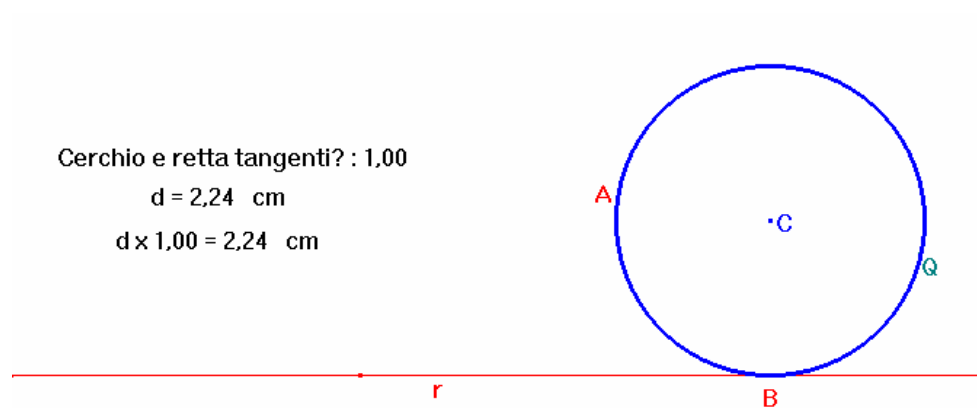


Figura 13

Per completare la costruzione, e determinare l'unico cerchio che risolve il problema, nel caso in cui la retta passante per i punti dati sia parallela alla retta data, dopo aver disegnato, su un nuovo foglio di *CABRI*, una **retta** r , e due **punti** A e B che ho disposto in modo che la **retta** s , passante per essi, fosse parallela alla retta r (fig. 14), ho determinato il punto E , di contatto del cerchio cercato con la retta r , come **punto d'intersezione** dell'**asse** del segmento avente per estremi A e B , con la retta r .

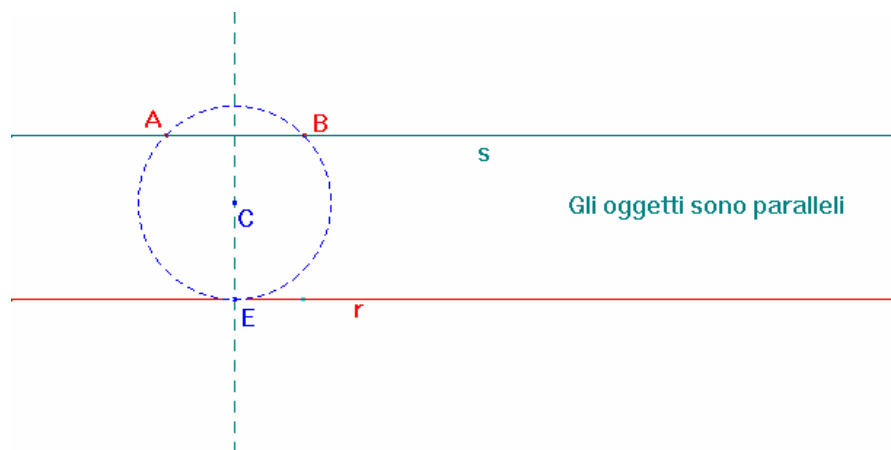


Figura 14

Per non ripetere la costruzione del cerchio passante per tre punti, ho definito la *macro* **Cerchio per tre punti**, evidenziando i punti A , B e E come oggetti iniziali, e il cerchio ABE come oggetto finale, nella figura relativa al caso generale (fig. 9). E, applicando tale *macro*,

ho determinato il cerchio \mathcal{G} , di centro C , passante per A , B e E , che è tangente in E alla retta r . Dal momento che la costruzione eseguita dà luogo a cerchi errati se la retta AB non è parallela a r (fig. 15), analogamente al caso precedente, ho applicato la *macro* **Cerchio soltanto se tangente retta**, alla retta r e al cerchio \mathcal{G} , determinando così il cerchio β , che esiste soltanto se la retta AB è parallela a r (fig. 16).

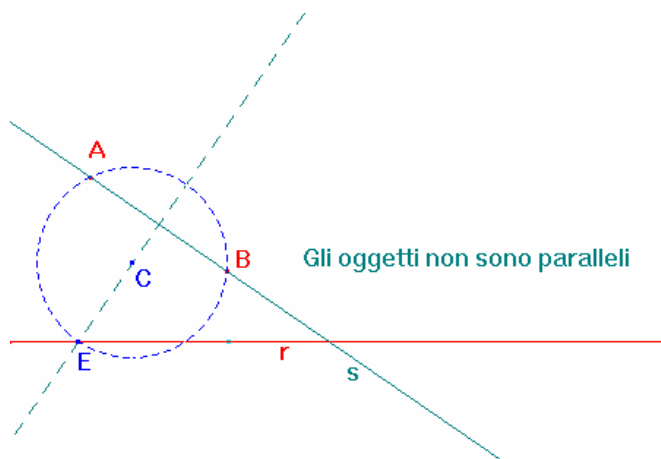


Figura 15

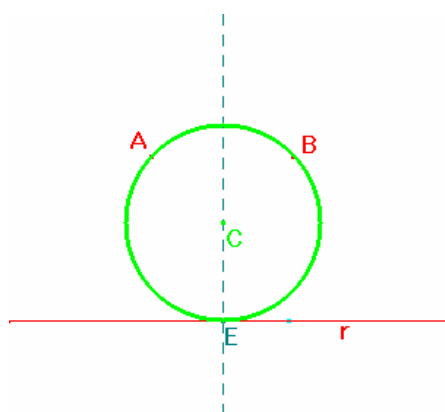


Figura 16

Infine, dopo aver **nascosto** il punto C , che appare anche se β non esiste, evidenziando A , B e r come oggetti iniziali, e β come oggetto finale, ho ottenuto una *macro*, che ho chiamato **Cerchi per due punti tangenti una retta – III**, che funziona correttamente se la retta passante per i punti evidenziati è parallela alla retta evidenziata, e non dà soluzioni altrimenti.

Dal momento che i tre casi analizzati esauriscono tutte le configurazioni possibili dei due punti e della retta, dopo aver disegnato, in un nuovo foglio di Cabri, due punti A e B , e una retta r , ho applicato a essi le *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta I, II e III** (fig. 17)⁶¹, e ho così ottenuto un disegno interattivo relativo al problema in esame, in cui appaiono tutti i cerchi risolvitori del problema in ogni configurazione, eccetto, come è giusto che sia, nel caso in cui i punti A e B , si trovano da parti opposte rispetto alla retta r , o giacciono ambedue su di essa⁶². Infine, per rendere evidente come interagire con la figura, ho inserito in essa una casella di testo in cui è indicato sia quali sono gli oggetti mobili, sia come possono essere spostati.

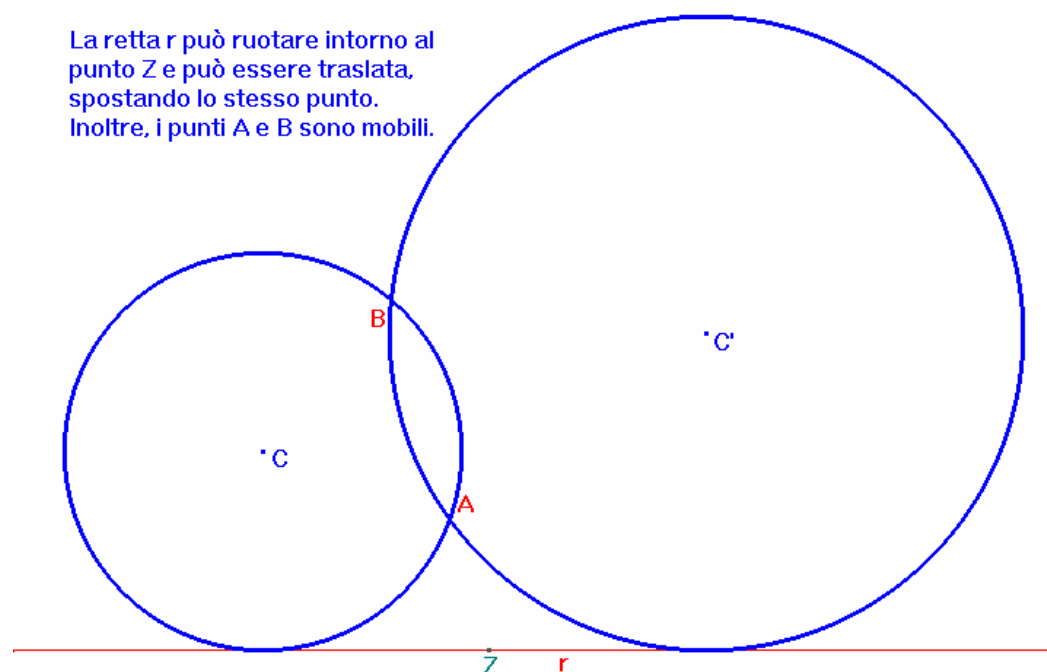


Figura 17

⁶¹ La *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta II** è stata applicata due volte, scambiando l'ordine tra i punti A e B , per far apparire sia la soluzione relativa al caso in cui A giace su r , sia quella relativa al caso in cui B giace su r .

⁶² Le *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta I, II e III** sono state definite dopo aver nascosto i centri dei cerchi finali, pertanto per far apparire i centri dei cerchi che soddisfano le condizioni del problema nel disegno interattivo, li ho ricostruiti come punti d'intersezione degli assi di due corde fissate su ogni singolo cerchio.

Poiché la costruzione del Problema XLIV, relativo a due rette e un punto, e del Problema XLVI, relativo a un punto, una retta e un cerchio, viene ricondotta al problema in esame, ho ritenuto opportuno creare una *macro* che, evidenziati due punti e una retta, dia luogo a tutti e soli i cerchi che passano per i due punti e sono tangenti alla retta. Sebbene evidenziando i punti A e B , e la retta r come oggetti iniziali, e i cinque cerchi ottenuti dall'applicazione delle tre *macro* come oggetti finali, si ottenga una *macro* completa relativa al problema in esame, mi sono posta il problema riguardante la possibilità di semplificarla ulteriormente, riducendo il numero dei suoi oggetti finali. Tale esigenza nasce sia dal fatto che per ottenere delle figure interattive complete, relative ai problemi che prevedono l'applicazione di tale *macro*, è necessario applicarla più volte, sia perché ad ogni suo cerchio finale corrispondono uno o più cerchi soluzione nella figura cui è applicata.

Poiché la *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta II**, relativa al caso in cui uno dei due punti giace sulla retta, deve essere applicata due volte, al fine di unificare il caso in cui A giace su r , con quello in cui B giace su r , ho definito un punto K che coincide con l'uno o con l'altro punto a seconda di quale tra essi giace su r . Più precisamente, **misurate** le distanze, d_A e d_B , di A e B da r (fig. 18), e calcolato il numero

$$\mu = \frac{d_A - d_B}{|d_A - d_B|} = \begin{cases} \text{inesistente} & \text{se } d_A = d_B \\ +1 & \text{se } d_A > d_B \\ -1 & \text{se } d_A < d_B \end{cases},$$

che in particolare è uguale a $+1$, se B giace su r , e a -1 , se A giace su r , ho disegnato il **cerchio** passante per B , di centro il **punto medio** M , di A e B , e uno dei suoi **punti d'intersezione** L , con l'asse di A e B . Definito poi, il **sistema di assi** MBL , che ha origine in M e unità di misura uguale alla lunghezza del **segmento** MB , ho **trasportato** μ sull'asse delle ascisse, e ho così determinato il punto K che, data la scelta del sistema di assi, coincide con il punto dato che giace su r . Disegnato allora, il **punto d'intersezione** C , dell'asse dei punti A e B , con la **retta perpendicolare** a r , passante per K , ho disegnato il **cerchio** \mathcal{C} , di centro C passante per A , che per come è stato costruito è tangente in K , e quindi in A o in B , alla retta r . E, dal momento che anche in tal caso la costruzione dà luogo a cerchi errati se nessuno dei punti dati appartiene alla retta data, ho applicato alla retta r e al cerchio \mathcal{C} , la *macro* **Cerchio soltanto se tangente retta**, determinando così il **cerchio** di centro C passante per Q , che esiste soltanto se uno dei punti, A o B , giace su r .

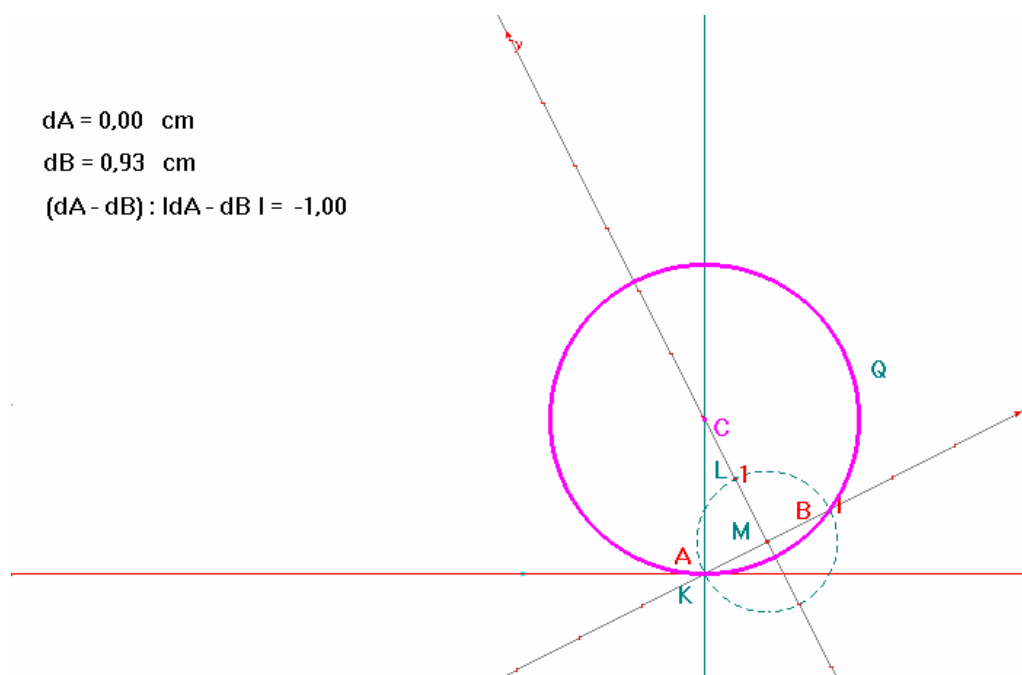


Figura 18

Dopo aver **nascosto** il punto C , che appare anche se nella costruzione né A , né B , giacciono su r , ho ridefinito la *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta – II**, evidenziando A , B , e r come oggetti iniziali, e l'ultimo cerchio disegnato come oggetto finale. Tale *macro*, che funziona correttamente se almeno uno dei punti evidenziati giace sulla retta, e non dà soluzioni in caso contrario, ha un solo oggetto finale, pertanto l'unione delle *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta – I, II, III** dà luogo a una *macro* che ha quattro oggetti finali.

Valutando la possibilità di ridurre ulteriormente i cerchi finali, ho osservato che nella costruzione relativa a una posizione generica dei due punti A e B , e della retta r , ho determinato i cerchi finali mediante l'applicazione della *macro* **Cerchi per tre punti**, applicata ai punti A , B e E (fig. 9), mentre nel caso in cui uno dei punti dati giace sulla retta, ho determinato il cerchio finale mediante l'individuazione del suo centro, come intersezione dell'asse di A e B , con la perpendicolare a r condotta dal punto giacente su r (fig. 11). Riflettendo sulla possibilità di unificare le due costruzioni, ho osservato che in effetti, nel primo caso, i centri C e C' dei cerchi finali possono essere determinati come intersezione delle rette perpendicolari a r , passanti per E e E' , con l'asse dei punti A e B . In

tal modo, l'unica differenza tra i due casi consiste nel fatto che quando uno dei punti giace su r , riportando un segmento di lunghezza uguale al medio proporzionale di AG e BG , sulla retta r , da parti opposte rispetto a G , si ottengono due punti E ed E' coincidenti con G . Prima di eseguire tale costruzione, per non ripetere quella del medio proporzionale tra AG e BG , ho creato la *macro* **Medio proporzionale** evidenziando, nella figura in cui ho eseguito tale costruzione (fig. 8), i segmenti AG e BG come oggetti iniziali, e il segmento GH come oggetto finale. Analizzando tale *macro* per stabilirne il corretto funzionamento, ho tuttavia appurato che essa dà luogo a errori quando i segmenti iniziali non sono adiacenti. Poiché l'errato funzionamento di una *macro* può creare problemi nella costruzione delle figure che dipendono da essa, in nuovo foglio di *CABRI* ho eseguito di nuovo la costruzione e, con l'ausilio di due ulteriori punti iniziali, ho ottenuto una *macro* applicabile a due qualsiasi segmenti, indipendentemente dalla loro posizione. Più precisamente, disegnati due segmenti AB e CD (fig. 17), due punti G e F , e determinato il **simmetrico** F' di F rispetto a G , ho **riportato** AB e CD , rispettivamente sulle **semirette** GF e GF' , individuando così i punti H e L . Determinato poi, il **punto medio** M , di H e L , ho disegnato il **cerchio** di centro M passante per H , avente HL come diametro, il **punto d'intersezione** T della **retta perpendicolare** a GF , passante per G , e il segmento GT che è medio proporzionale tra AB e CD ⁶³. E infine, evidenziando i segmenti AB e CD , e i punti G e F , come oggetti iniziali, e il segmento GT come oggetto finale, ho ridefinito la *macro* **Medio Proporzionale**.

⁶³ Il triangolo HTL è rettangolo in quanto inscritto in un semicerchio, pertanto, per il secondo teorema di Euclide, il segmento GT è medio proporzionale tra $GH = AB$ e $GL = CD$.

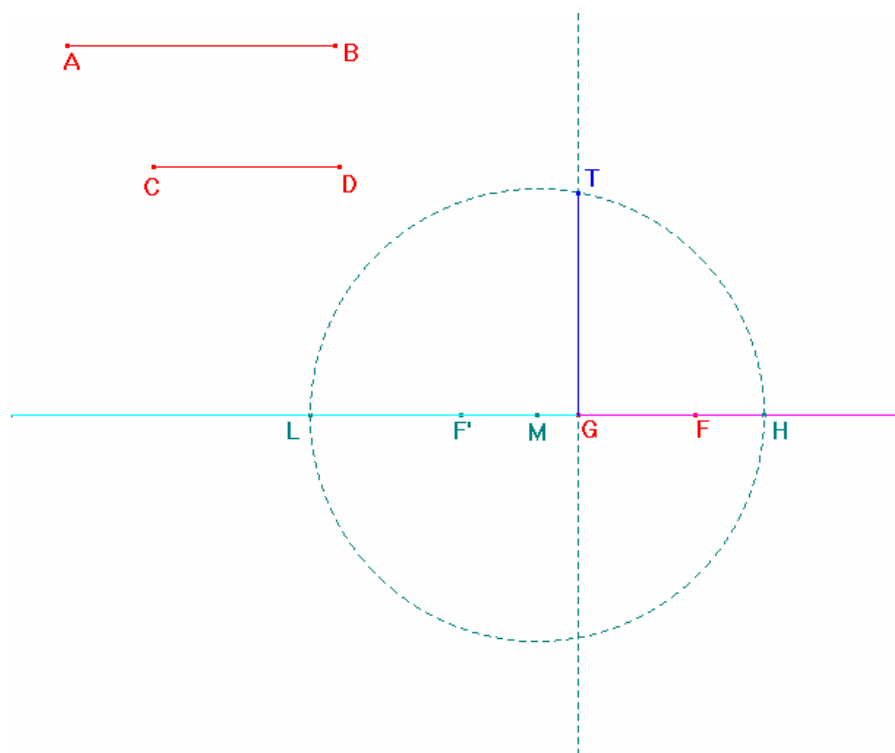


Figura 19

Sebbene il fatto che tale *macro* abbia due ulteriori oggetti iniziali non rappresenti un grave inconveniente, ho cercato di migliorarla per riuscire ad ottenere una *macro* che dipende solo dai due segmenti iniziali, e ho così appurato che le *macro* definite mediante costruzioni geometriche che dipendono solo dai segmenti AB e CD , non danno luogo al segmento che costituisce l'oggetto finale, quando uno dei due segmenti dati è il segmento nullo. Dal momento che la finalità delle costruzioni eseguite è quella di creare dei disegni interattivi, in cui gli oggetti possono essere spostati e modificati in qualsiasi modo si voglia, in generale nelle *macro* che ho definito, ho anteposto la completezza al numero di oggetti iniziali. Nel caso in questione, vi è però un altro modo per aggirare il problema, che è quello di ricorrere alla calcolatrice interattiva. Più precisamente, dopo aver **misurato** la lunghezza dei segmenti AB e CD , e aver **calcolato** la quantità $mp = \sqrt{AB \cdot CD}$, che rappresenta la lunghezza del medio proporzionale di AB e CD , l'ho **trasportata** sul punto A , individuando un punto I , e di conseguenza il **segmento** AI , che è il medio proporzionale di AB e CD , e ho poi ridefinito la *macro* **Medio Proporzionale** evidenziando i segmenti AB e CD come oggetti iniziali, e il segmento AI come oggetto finale (fig. 20).

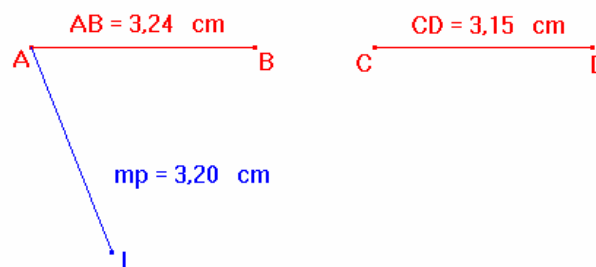


Figura 20

Disegnati allora, su un nuovo foglio di Cabri, due **punti** A e B , e una **retta** r (fig. 21), ho disegnato il **punto d'intersezione** G della **retta** passante per A e B , con r , i segmenti AG e BG e, con la **macro Medio Proporzionale**, il medio proporzionale GT , di AG e BG . Determinati poi, i **punti d'intersezione** E e E' , del **cerchio** di centro G passante per T , con r , e tracciate le **rette perpendicolari** a r , passanti per E e E' , ho determinato i **punti d'intersezione** C e C' , di tali rette con l'asse di A e B , e ho disegnato i **cerchi** di centro C e C' , passanti per A , che soddisfano le condizioni del problema. Sebbene la costruzione dei due casi sia ora completa, essa non è ancora corretta, in quanto se i punti A e B giacciono nei semipiani opposti di origine r , la costruzione dà luogo a cerchi errati. Per ovviare all'inconveniente, come precedentemente, ho applicato a ciascuno dei cerchi determinati e alla retta r la **macro Cerchio soltanto se tangente retta**, e in tal modo ho ottenuto i cerchi di centro C e C' , che esistono soltanto se soddisfano le condizioni del problema.

Nascosti i punti C e C' , che appaiono anche se il problema non ammette soluzioni, ho evidenziato A , B , e r come oggetti iniziali, e gli ultimi cerchi disegnati come oggetti finali, ottenendo così una **macro**, che ho chiamato **Cerchi per due punti tangenti una retta – IV**, che funziona correttamente e dà luogo alle soluzioni del problema sia se uno dei punti A o B giace su r , sia se nessuno di essi giace su r .

E, per ottenere un'altra **macro** completa relativa al problema in esame, che ha un numero minore di oggetti finali, dopo aver disegnato in un nuovo foglio di **CABRI**, due punti e una retta, ho applicato a essi le **macro Cerchi per due punti tangenti una retta - III e IV**, e ho ridefinito la **macro Cerchi per due punti tangenti una retta**, evidenziando i due punti e la retta come oggetti iniziali, e i tre cerchi ottenuti dall'applicazione delle due **macro**, come

oggetti finali. Infine, poiché tale *macro*, nel caso in cui uno dei punti A o B , giace su r , dà luogo a due cerchi coincidenti anziché a un solo cerchio, ho modificato il disegno interattivo relativo al problema in esame, sostituendo l'applicazione della precedente *macro* completa con quella dell'ultima *macro*, per rendere evidente che nel caso in cui uno dei punti dati appartiene alla retta data, il problema ammette due soluzioni coincidenti, e non una, come nel caso in cui la retta passante per i punti dati è parallela alla retta data.

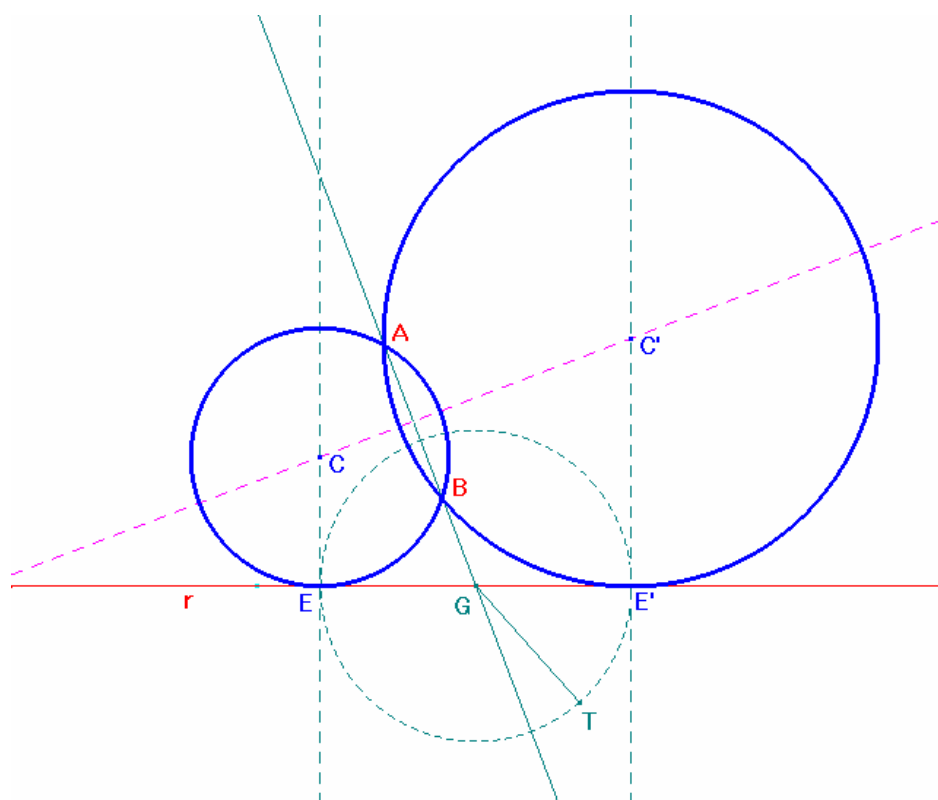


Figura 21

1.7 Problema XLIV

Descrivere un cerchio che passi per un punto dato, e che tocchi due rette date di posizione.

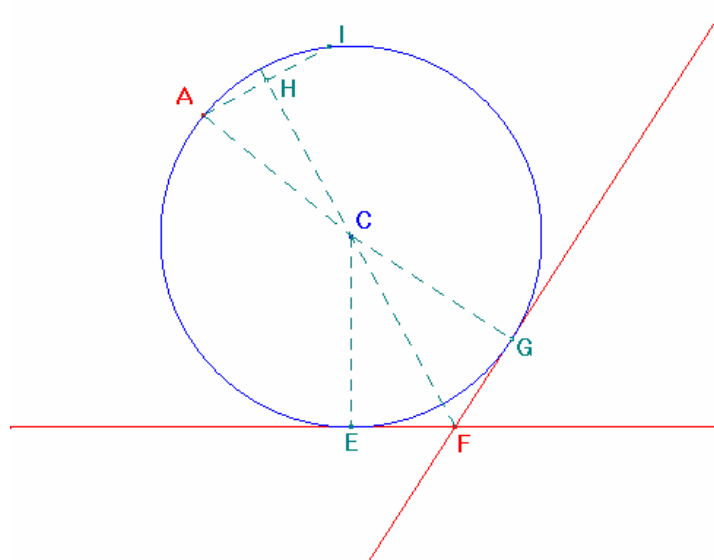


Figura 1

Per risolvere il problema, dopo aver disegnato il punto dato A , le rette date EF e FG , e il cerchio cercato AEG , Newton sceglie come incognita $CF = x$, e pone $\frac{CE}{CG} = \frac{CF}{CG} = \frac{d}{e}$, $AH = a$ e $FH = b$, con H piede della perpendicolare condotta dal punto A alla bisettrice CF dell'angolo formato dalle due rette date (fig. 1).

Determinate poi le espressioni algebriche di AC e CG , in funzione dei termini noti e dell'incognita, dal momento che essi sono raggi dello stesso cerchio, ottiene l'equazione risolvente del problema eguagliando i loro quadrati:

$$(d^2 - e^2)x^2 - 2bd^2x + a^2d^2 + b^2d^2 = 0 \quad (\diamond).$$

E, scritta la sola soluzione:

$$CF = x = \frac{bd^2 - d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2},$$

conclude la risoluzione del problema osservando che, noto FC , e quindi la posizione del centro C del cerchio cercato, il segmento

$$HC = HF - FC = HF - x = HC = \frac{-e^2b + d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2} \text{ rappresenta la soluzione}$$

del Problema XLIII⁶⁴, ossia il segmento che unisce il punto medio di una corda del cerchio cercato al centro.

Sebbene il problema in esame ammetta in generale due soluzioni, e malgrado ciascuna radice dell'equazione (♦) permetta di individuare un cerchio che soddisfa le condizioni del problema, Newton non considera entrambe le radici, e, molto probabilmente, ciò è dovuto

$$\text{al fatto che } C'F = x = \frac{bd^2 + d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2} \text{ conduce alla radice}$$

$$HC' = FC' - HF = x - b = \frac{+be^2 + d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}, \text{ dell'equazione risolvibile del}$$

Problema XLIII, che egli non ha considerato.

La riduzione del problema in esame al problema relativo a due punti e una retta, è presente anche nel Problema II del *Quaestionum solutio geometrica*⁶⁵, in cui egli determina il cerchio *ABE* passante per un punto *A* e tangente due rette incidenti *FE* e *FH*, seguendo il procedimento indicato da Viète⁶⁶, ovvero individuando prima il simmetrico *B*, del punto *A* rispetto alla bisettrice *FD* dell'angolo formato dalle due rette, e poi il cerchio passante per *A* e *B*, e tangente *FE*⁶⁷.

Per eseguire tale costruzione con *CABRI*, al fine di rendere la figura interattiva, ho disegnato due **rette** incidenti *r* e *s* (fig. 2), un **punto** *A*, il **cerchio** Γ , di centro *F* passante per *A*, i **punti di intersezione** *R* e *S*, di tale cerchio rispettivamente con le rette *r* e *s*, e la **bisettrice** *b*, dell'angolo individuato da *R*, *F* e *S*⁶⁸. Fatto ciò, ho disegnato il **simmetrico** *I*,

⁶⁴ Si tratta del problema dei *Contatti* relativo a due punti e una retta. Paragrafo 1.6.

⁶⁵ The Mathematical Papers of Isaac Newton, Vol. IV, pp.254 - 255.

⁶⁶ Problema IV, Apollonius Gallus.

⁶⁷ Paragrafo 1.6, fig. 7.

⁶⁸ Per costruire la bisettrice di un angolo con Cabri, bisogna evidenziare tre punti, il secondo dei quali è il vertice. Pertanto, per costruire *b* avrei potuto scegliere, al posto di *R* e *S*, un punto qualsiasi su ciascuna delle rette *r* e *s*. La scelta di non introdurre nuovi elementi definendo *b* mediante i due punti *R* e *S*, è legata al fatto di non voler precludere la possibilità di definire una *macro* relativa al problema in esame, che ha come oggetti iniziali solo un punto e due rette, in quanto, in generale, per costruire una *macro* coerente bisogna considerare tutti gli elementi primitivi che intervengono nella costruzione.

del punto A rispetto a b , e, con la *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta**⁶⁹, i cerchi passanti per i punti A e I , tangenti alla retta r .

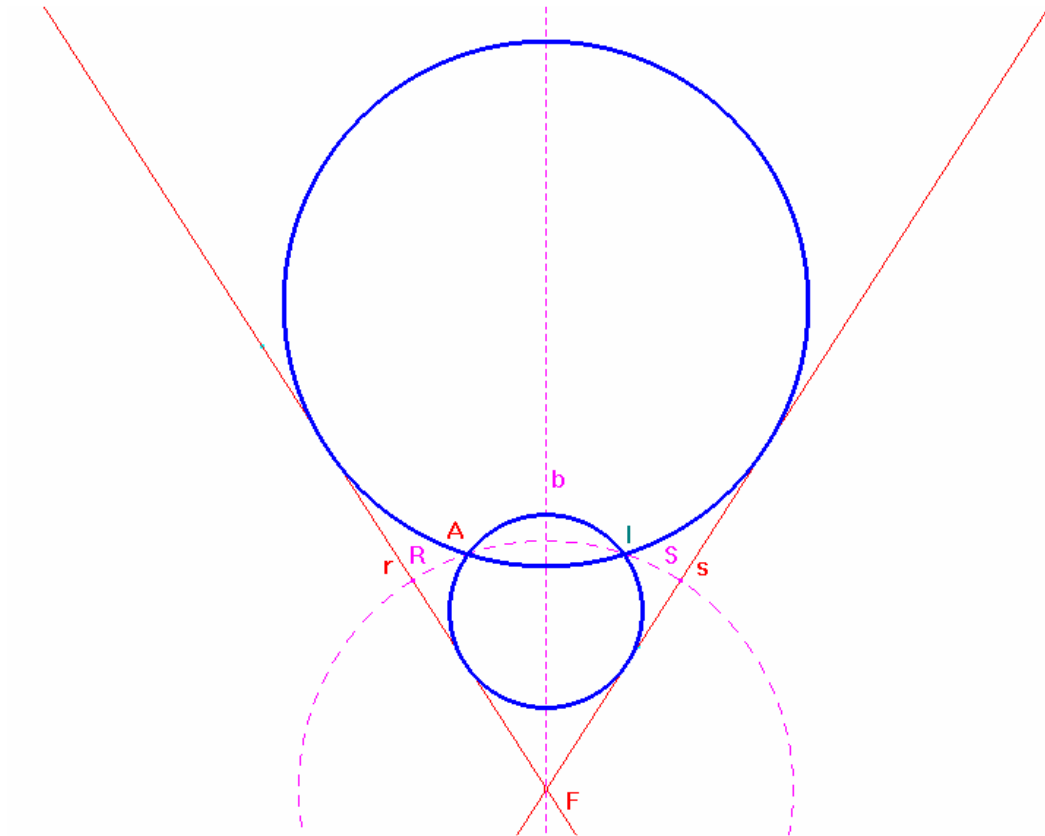


Figura 2

Sebbene la figura ottenuta non dia luogo a cerchi errati, essa non è ancora completa, in quanto, spostando il punto A all'interno del supplementare dell'angolo RFS , i punti A e I si trovano da parti opposte rispetto a ciascuna delle rette r e s , pertanto, i cerchi passanti per essi e tangenti una delle rette r o s , non esistono (fig. 3).

⁶⁹ Paragrafo 1.6.

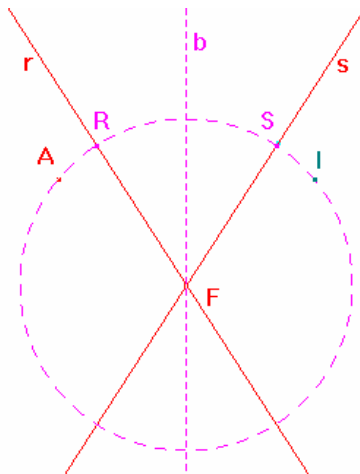


Figura 3

Per completare la costruzione, ho dunque disegnato l'ulteriore **punto d'intersezione** S' , del cerchio Γ con la retta s (fig. 4), la **bisettrice** b' dell'angolo individuato da R , F e S' , il **simmetrico** I' , del punto A rispetto a b' , e infine, con la *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta**, i cerchi passanti per i punti A e I' , tangenti alla retta r .

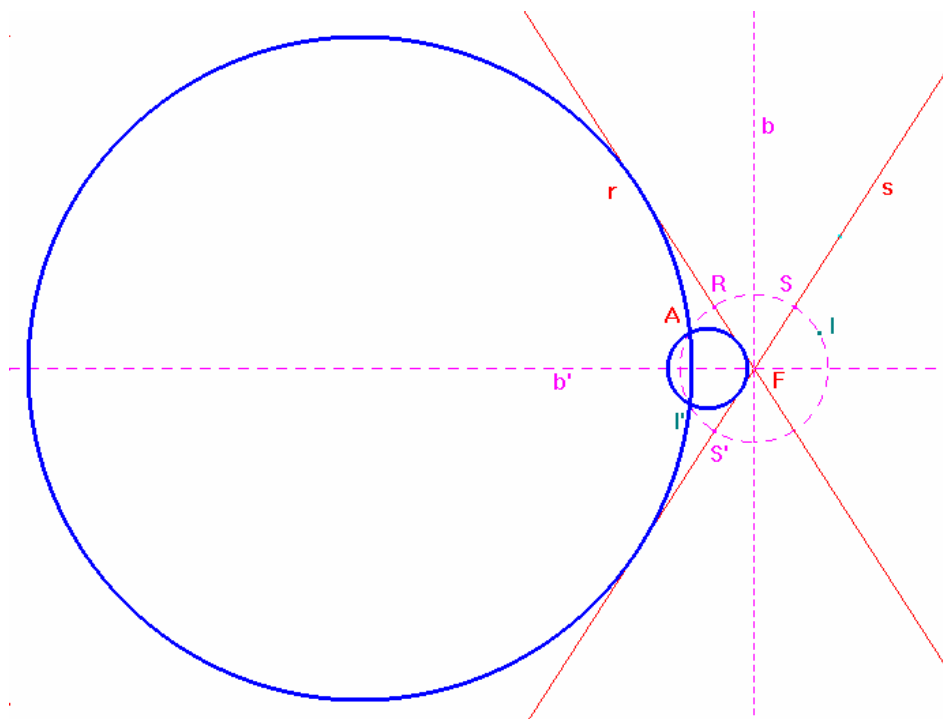


Figura 4

Sebbene la figura così ottenuta sia completa, dal momento che essa è costituita dall'unione di due sotto-costruzioni, occorre verificarne la correttezza analizzando il suo comportamento nei casi in cui le sotto-costruzioni coesistono, ovvero nel caso in cui le rette r e s sono parallele, e nel caso in cui il punto A giace su una delle due rette. Nella prima eventualità (fig. 5), poiché le bisettrici b e b' coincidono entrambe con la retta parallela a r e s , equidistante da esse, si ha che i punti I e I' coincidono, pertanto le due sotto-costruzioni sono sovrapposte. Malgrado ciò non dia luogo ad alcuna ambiguità, per non far nascere l'idea errata che nel caso in cui le rette r e s siano parallele il problema ammetta due coppie di soluzioni coincidenti, ho invalidato una delle due costruzioni nel caso in questione.

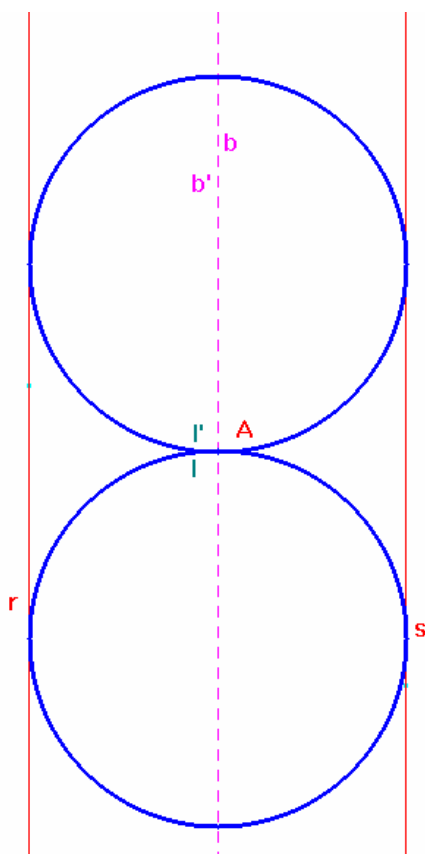


Figura 5

Più precisamente, dal momento che come già osservato, se r e s sono parallele i punti I e I' coincidono, dopo aver **misurato** la distanza d , di tali punti (fig. 6), ho **calcolato** la quantità

$n = \frac{\log d}{\log d}$, che è uguale a 1 se r e s non sono parallele ed è inesistente in caso contrario, e

$d = 5,20 \text{ cm}$
 $n = 1,00$
 $r1 = 0,96 \text{ cm}$
 $r2 = 3,44 \text{ cm}$
 $r1 \times 1,00 = 0,96 \text{ cm}$
 $r2 \times 1,00 = 3,44 \text{ cm}$

⁷⁰ I centri dei cerchi α e α' , non compaiono in quanto tali cerchi sono stati costruiti mediante la *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta**, che è stata definita dopo aver nascosto i centri dei cerchi finali. Tuttavia, essi possono essere visualizzati mediante il comando **Mostra/Nascondi**.

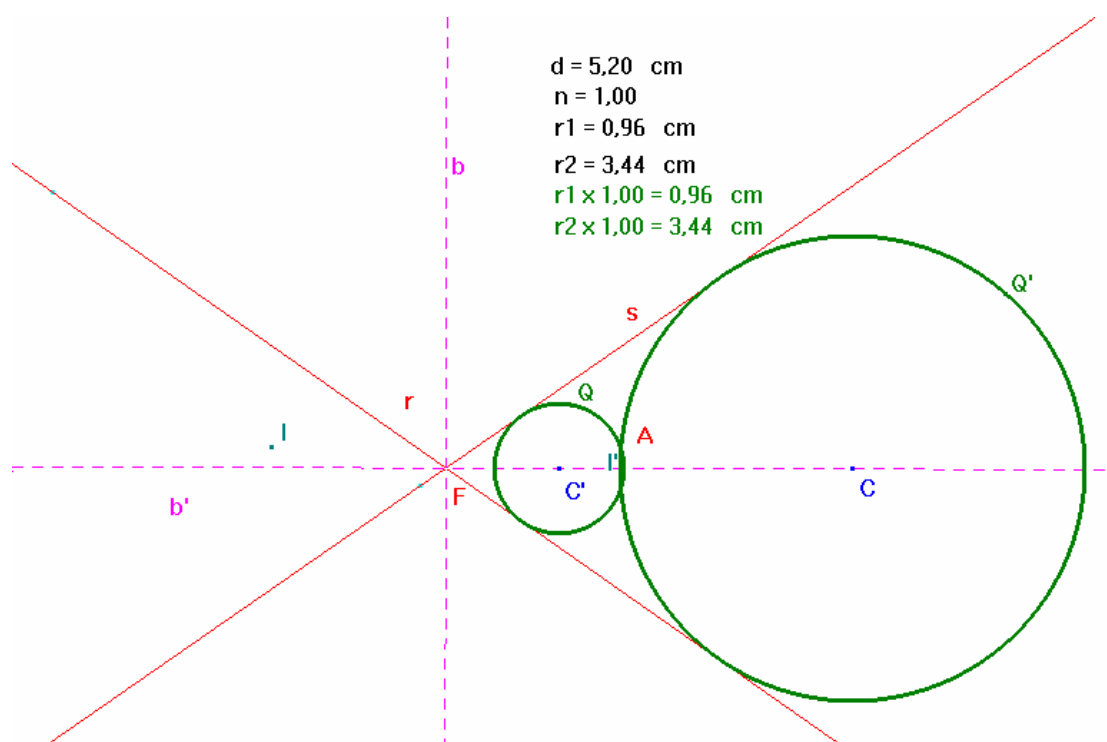


Figura 7

Nella seconda eventualità (fig. 8), ciascuna sotto-costruzione dà luogo a due cerchi sovrapposti, tuttavia, sebbene anche in tal caso il problema non ammetta due coppie di soluzioni coincidenti, è proprio la coesistenza delle due sotto-costruzioni che permette di ottenere tutte le soluzioni che il problema ammette in tale configurazione.

Poiché con lo spostamento manuale del punto A su una delle rette r o s , allo scopo di visualizzare i cerchi che in tale configurazione risolvono il problema, non si produce l'effetto desiderato, ho deciso di illustrare tale caso particolare mediante un'ulteriore figura interattiva, in cui il punto A giace su r , e ho ovviato all'inconveniente dato dalla coesistenza delle due sotto-costruzioni **nascondendo** uno dei cerchi finali cui dà luogo ciascuna di esse.

⁷¹ Dopo aver disegnato i cerchi passanti per Q e Q' , ho nascosto i loro centri C e C' , in quanto essi appaiono anche quando i cerchi non vengono visualizzati (nota 70). E, per far apparire i centri dei cerchi nella figura interattiva, li ho ricostruiti come **punti d'intersezione** degli assi di due corde di ogni cerchio finale.

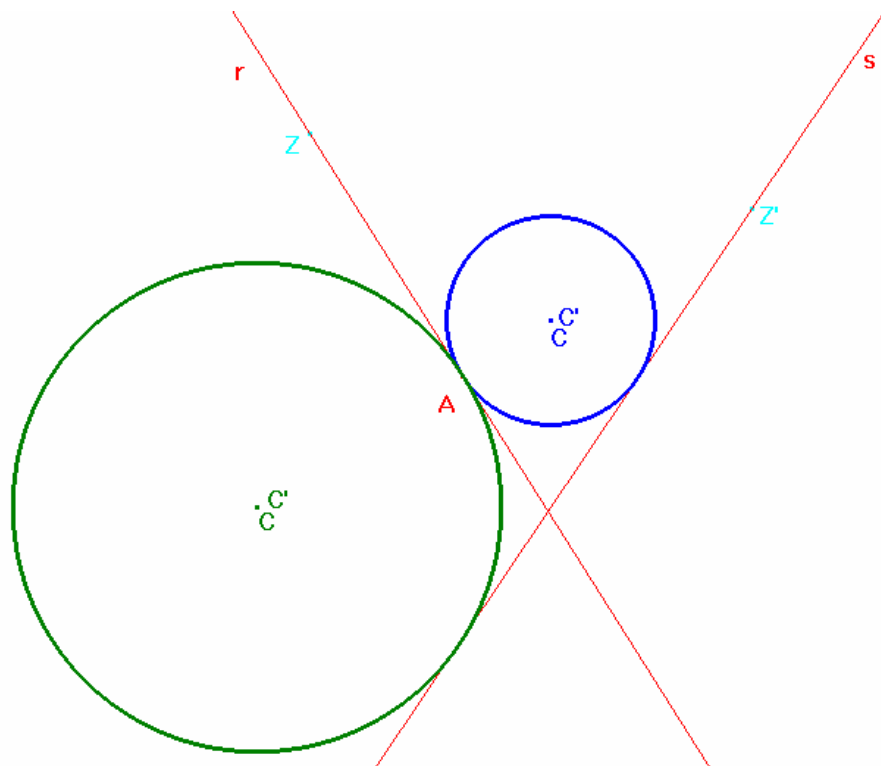


Figura 8

Inoltre, sia nella prima figura interattiva, in cui il punto A non giace su nessuna delle due rette (fig. 9), sia nella seconda, in cui il punto A giace su una delle due rette (fig. 10), ho inserito una casella di testo in cui è indicato quali sono gli oggetti mobili, e come possono essere spostati.

Infine, poiché l'unico problema dei *Contatti* riconducibile al problema esaminato è quello relativo a due rette e un cerchio, che non è stato inserito da Newton nell'*Arithmetica Universalis*, non è necessario creare una *macro* ad esso relativa. Tuttavia, evidenziando, il punto A e le rette r e s come oggetti iniziali, e i quattro cerchi disegnati, insieme ai loro

centri⁷², come oggetti finali, si ottiene una *macro* coerente che risolve correttamente il problema della determinazione dei cerchi passanti per un punto e tangenti due rette.

In realtà, dal momento che i cerchi cui dà luogo la *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta** sono tre⁷³, i cerchi finali, che nella costruzione eseguita si scambiano il ruolo di soluzione del problema in esame, al variare della posizione del punto *A* e delle rette *r* e *s*, dovrebbero essere sei, tuttavia, poiché il caso in cui la retta per i punti *A* e *I*, è parallela a *r* o *s*, non si presenta mai, essi sono quattro:

- due cerchi quando *A* è interno all'angolo *RFS* (o a quello ad esso opposto al vertice);
- due cerchi quando *A* è interno all'angolo *RFS'* (o a quello ad esso opposto al vertice).

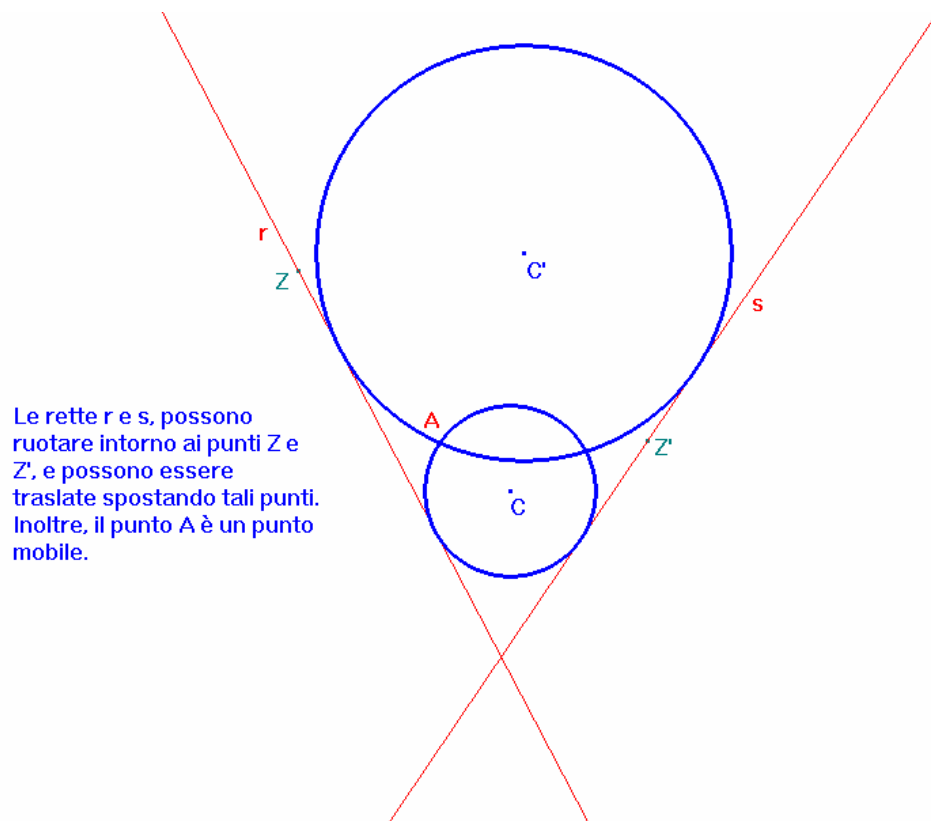


Figura 9

⁷² I centri dei cerchi che appaiono nella figura completa sono stati ricostruiti (nota 71), pertanto devono essere annoverati tra gli oggetti finali.

⁷³ Tale *macro* è stata definita come unione di due *macro*, l'una relativa al caso generale e al caso in cui uno dei punti giace sulla retta, che ha due oggetti finali, e l'altra relativa al caso in cui la retta passante per i due punti è parallela alla retta, che ha un oggetto finale.

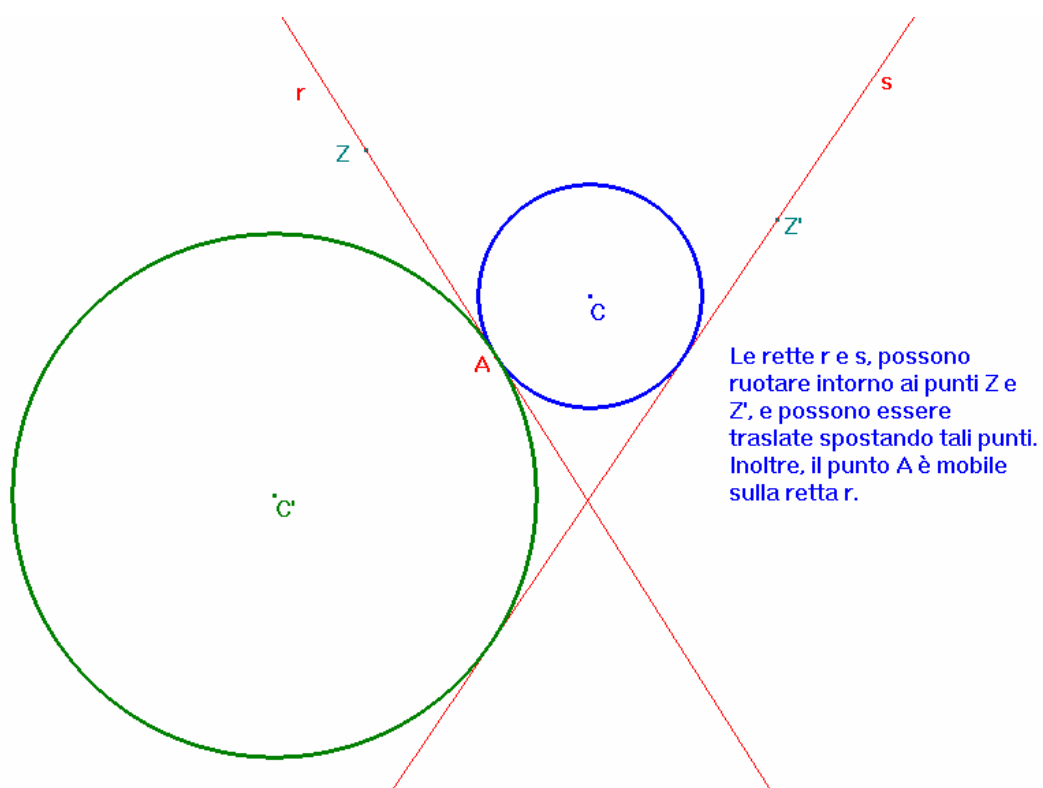


Figura 10

1.8 Problema XLV

Descrivere un cerchio che passi per due punti dati, e che tocchi un altro cerchio dato di posizione.

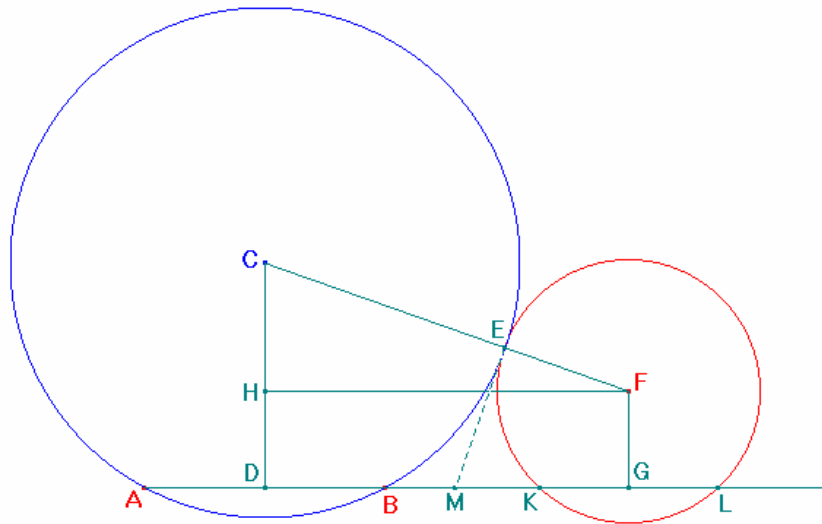


Figura 1

Per risolvere il problema, dopo aver disegnato i punti dati A e B , e il cerchio dato EK , Newton sceglie come incognita $DC = x$, al fine di determinare il centro C del cerchio cercato, e pone $AD = DB = a$, $DG = HF = b$, $FG = c$ e $EF = d$, con D punto medio dei punti dati A e B , F centro del cerchio dato EK , E punto di contatto del cerchio dato con il cerchio cercato, e, G e H , proiezioni del punto F rispettivamente sulla retta AB , e sulla retta per C perpendicolare alla retta AB (fig. 1).

Determinate poi due diverse espressioni di CF , in funzione dei termini noti e dell'incognita, ne eguaglia i quadrati ottenendo l'equazione risolvente del problema:

$$(d^2 - c^2)x^2 + 2g^2cx + d^2a^2 - g^4 = 0 \quad (\spadesuit)$$

in cui $2g^2$ indica la quantità $c^2 + b^2 - a^2 - d^2$.

In realtà, il problema in esame ammette in generale due soluzioni, tuttavia, poiché nella configurazione considerata, il centro C' del secondo cerchio che soddisfa le condizioni del problema appartiene alla semiretta opposta alla semiretta DH (fig. 2), la lunghezza del segmento $C'D$ non è soluzione dell'equazione (\spadesuit), ma dell'equazione:

$$\text{ovvero, } C'D = \frac{+g^2c + d\sqrt{g^4 - a^2d^2 + a^2c^2}}{d^2 - c^2}.$$

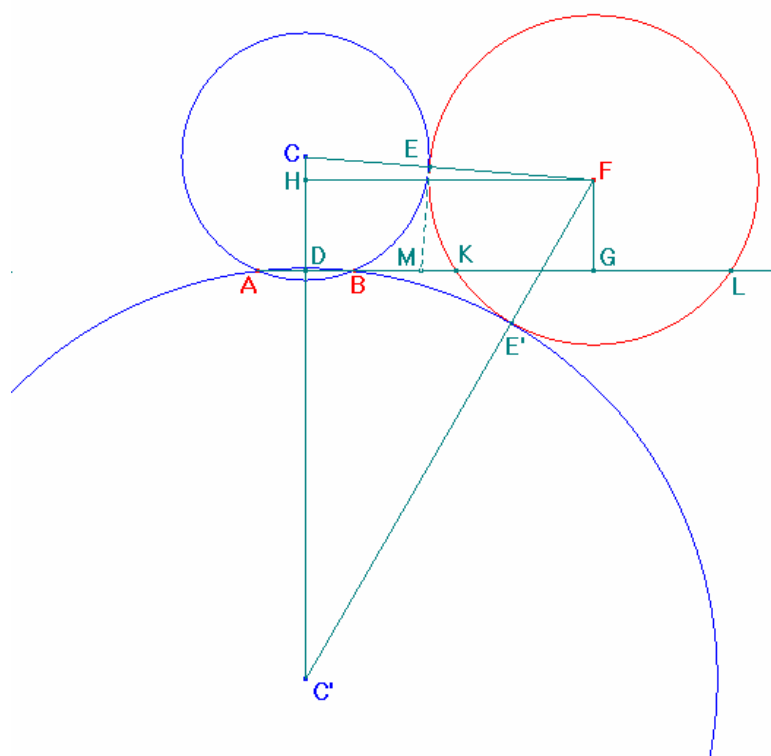


Figura 2

⁷⁴ Si ottiene sostituendo l'espressione $C'H = C'D + DH = C'D + FG = x + c$, all'espressione $CH = CD - DH = CD - FG = x - c$, nel procedimento risolutivo di Newton (Paragrafo 5.19). E, dal momento che differisce da (♠) solo per il segno del coefficiente del termine di primo grado, ha radici opposte a quelle di tale equazione.

Cambiando la posizione del cerchio dato, in modo che esso sechi la retta passante per i punti dati A e B , può altresì accadere che entrambi i centri C e C' , dei cerchi che soddisfano le condizioni del problema, appartengano alla semiretta DH (fig. 3), o alla sua opposta (fig. 4). Nel primo caso, le lunghezze dei segmenti CD e $C'D$ sono radici dell'equazione (♠), nel secondo caso, esse sono radici dell'equazione (♥)⁷⁵.

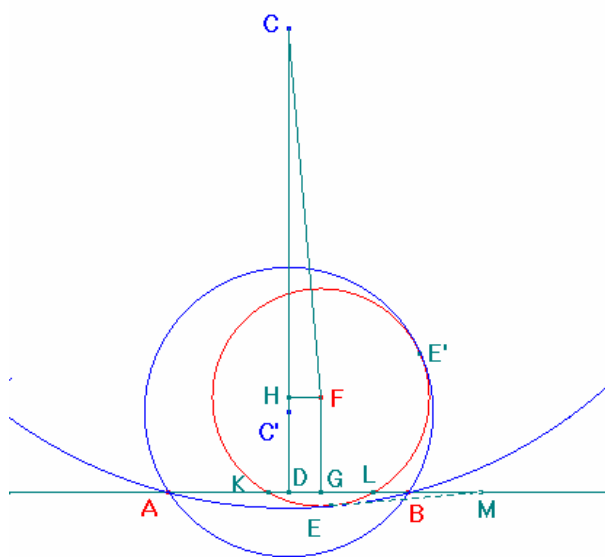


Figura 3

⁷⁵ Ciò è dovuto al fatto che, nel primo caso $CH = CD - FG = x - c$ e $C'H = C'D - FG = x - c$, mentre nel secondo $CH = CD + FG = x + c$ e $C'H = C'D + FG = x + c$.

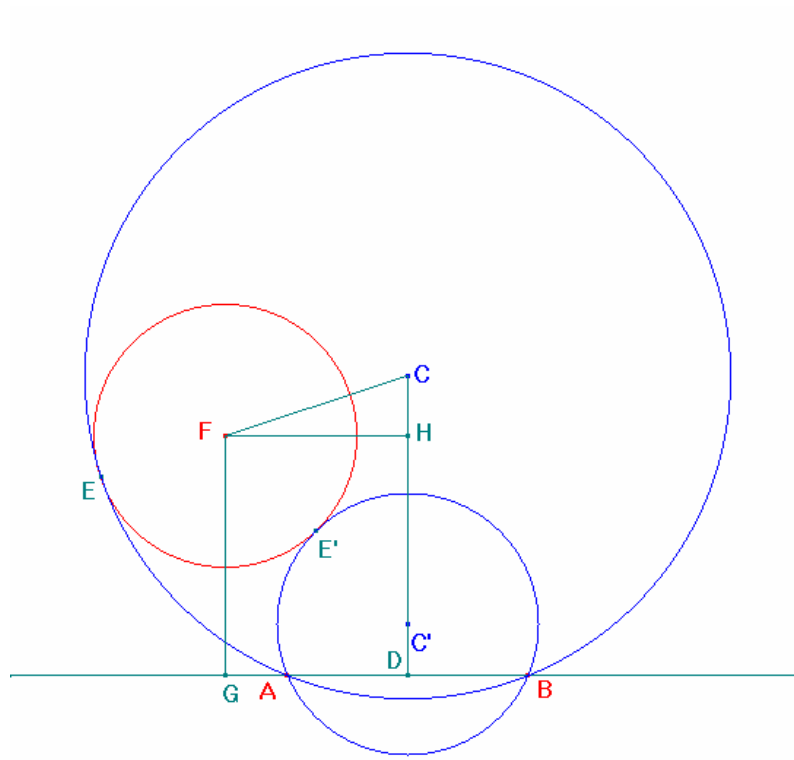


Figura 5

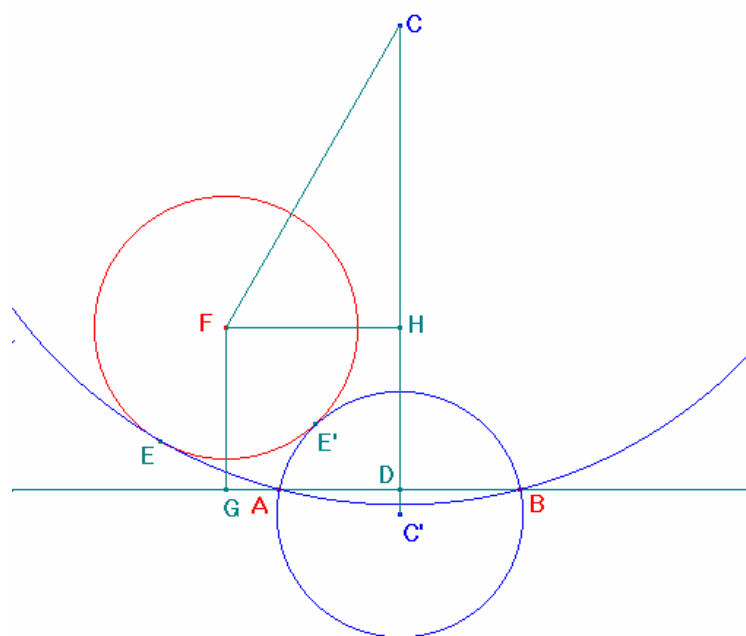


Figura 6

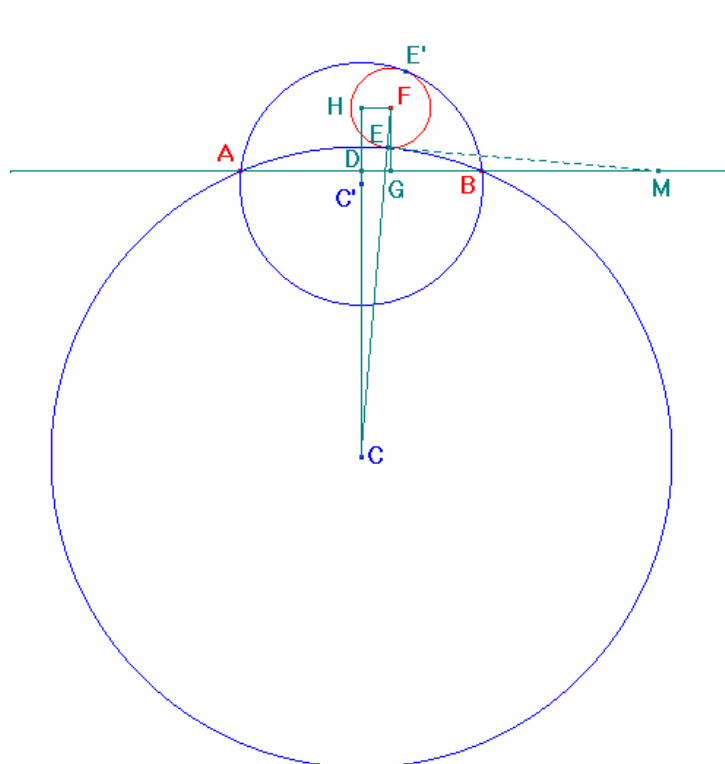


Figura 7

Nel Problema III, del *Quaestionum Solutio Geometrica*⁷⁹, Newton risolve geometricamente il problema in esame, riducendolo alla determinazione del cerchio passante per tre punti, mediante l'individuazione del punto di contatto del cerchio dato con il cerchio cercato.

Più precisamente, indicato con E tale punto di contatto, e con EM la tangente passante per esso (fig. 8), Newton osserva che $AM \times BM = EM^2 = MK \times ML$ ⁸⁰, pertanto, diviso BK in M in modo tale che $AM : MK = ML : MB$, e determinato il medio proporzionale ME tra AM e BM , il cerchio di centro M e raggio ME incontra il cerchio dato nel punto E .

⁷⁹ *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. IV, pp. 256 – 257.

⁸⁰ La prima uguaglianza è dovuta al teorema della tangente e della secante applicato al cerchio cercato, al segmento di tangente EM , e alla secante AB . La seconda uguaglianza è dovuta allo stesso teorema, applicato al cerchio dato, al segmento di tangente EM , e alla secante AB .

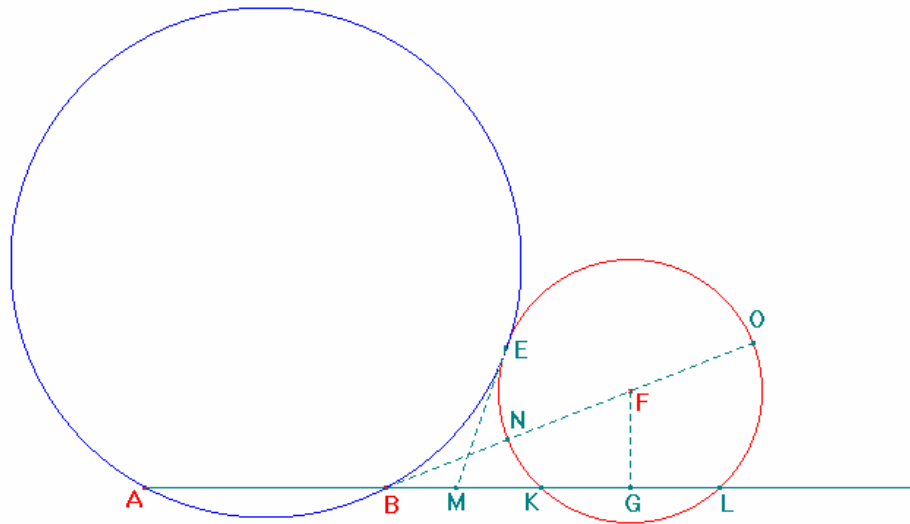


Figura 8

Poiché la determinazione di E , è subordinata alla conoscenza di M , Newton continua la sua risoluzione mostrando come individuare tale punto. In particolare, osservato che $AM = AB + MB$, $MK = BK - MB$ e $ML = BL - MB$, egli riscrive la proporzione $AM : MK = ML : MB$, sostituendo ad AM , MK e ML le loro espressioni:

$$AB + MB : BK - MB = BL - MB : MB .$$

E, applicata la proprietà del comporre, ottiene poi:

$$AB + BK (= AK) : BK - MB = BL : MB$$

che, invertendo i medi, diviene:

$$AK : BL = BK - MB : MB .$$

Applicata ancora la proprietà del comporre, ottiene:

$$AK + BL : BL = BK : MB$$

che, detto A' il punto medio di A e B , diviene:

$$2A'G : BL = BK : MB^{81} .$$

E, osservato che:

⁸¹ $AK + BL = AK + BG + GL = AK + BG + KG = AG + BG = AA' + A'G + A'G - A'B = 2A'G$

$$BL : BO = BN : BK^{82}$$

dalle ultime due proporzioni, ottiene:

$$2A'G : BO = BN : BM ,$$

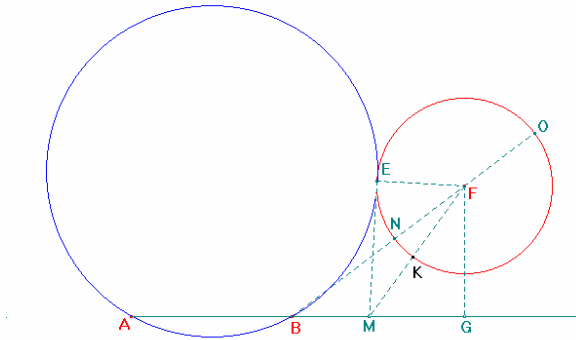
che essendo noti $A'G$, BO e BN , permette di determinare BM e quindi il punto M .

Per includere il caso in cui il cerchio dato e la retta per A e B non sono secanti, Newton conclude la risoluzione del problema affermando che la soluzione data è universale, senza motivare la sua asserzione. Tuttavia, in una frase poi cancellata del suo manoscritto aveva osservato che, se AB non interseca EKL , al posto di $MK \times ML$ bisogna scrivere $MG^2 + FG^2 - KF^2$ ⁸³, ottenendo in tal modo che $(AG - MG) \times (BG - MG)$, ossia $AM \times BM$, è uguale a $MG^2 + FG^2 - KF^2$, ovvero che

$$AG \times BG - FG^2 + KF^2 - \overline{AG + BG} \times MG = 0^{84}.$$

⁸² La proporzione segue dall'applicazione del teorema delle secanti al cerchio dato e alle rette BO e BL .

⁸³ Si ha infatti che, $EM^2 = FM^2 - EF^2 = MG^2 + FG^2 - EF^2 = MG^2 + FG^2 - KF^2$



⁸⁴ Per rendersi conto del fatto che trovato BM come nel caso in cui AB ed EKL sono secanti, MG soddisfi tale equazione, è sufficiente osservare che da essa si ottiene $MG = \frac{AG \times BG + KF^2 - FG^2}{AG + BG}$, che, essendo $BG^2 = BF^2 - FG^2 = (KF + BN)^2 - FG^2 = KF^2 + BN^2 + 2KF \times BN - FG^2$, si può ancora scrivere $MG = \frac{AG \times BG + BG^2 - BN^2 - 2KF \times BN}{AG + BG} = \frac{AG \times BG + BG^2 - BN(BN + 2KF)}{AG + BG} = \frac{AG \times BG + BG^2 - BN \times BO}{AG + BG} = BG - \frac{BN \times BO}{AG + BG} = BG - \frac{BN \times BO}{2A'G}$, ovvero $MG = BG -$ il quarto proporzionale di $2A'G$, BO e BN , come nel caso secante.

Dal momento che la costruzione geometrica descritta da Newton, oltre ad essere molto semplice, permette di determinare entrambe le soluzioni del problema⁸⁵, ho deciso di realizzare la figura interattiva con il suo ausilio, tuttavia, poiché il problema in esame è uno dei problemi dei *Contatti* per i quali la traduzione in linguaggio inversivo della risoluzione di Viète⁸⁶, permette di pervenire altrettanto semplicemente alle soluzioni, prima di procedere in tal senso, ho analizzato anche la costruzione relativa alla risoluzione di Viète.

Più precisamente, dati due punti A e B , un cerchio di centro F , e indicata con $I_{B,r}$ l'inversione di centro B e di costante r , uguale alla potenza di B rispetto al cerchio dato, la traduzione della risoluzione di Viète in linguaggio inversivo, consiste nel determinare il cerchio cercato come immagine, mediante $I_{B,r}$, della retta t , passante per $A' = I_{B,r}(A)$ e tangente al cerchio dato⁸⁷. Per rendersi conto della veridicità di tale asserto, è sufficiente ricordare che un'inversione trasforma rette che non passano per il centro d'inversione in cerchi passanti per esso, e osservare che la retta t viene dunque trasformata in un cerchio passante per $I_{B,r}(A') = I_{B,r}(I_{B,r}(A)) = A$, per $I_{B,r}(B) = B$ e tangente al cerchio dato in $I_{B,r}(E)$, con E punto di contatto di t con il cerchio dato.

Per eseguire tale costruzione con *CABRI*, dopo aver disegnato due **punti** A e B , e un **cerchio** γ , di centro F , ho disegnato i **punti d'intersezione** U e V , della **retta** BF con γ (fig. 9), e, dato che la potenza di B rispetto a γ è media proporzionale tra le lunghezze dei segmenti BU e BV , ho determinato, con la *macro Medio proporzionale*⁸⁸, il segmento BT , tale che $\overline{BT}^2 = BU \times BV$. Disegnato poi, il **cerchio** Γ , di centro B passante per T , ho determinato l'**immagine** A' , del punto A rispetto all'inversione rappresentata da Γ , e, per completare la costruzione, ho individuato una delle tangenti al cerchio γ passanti per A' .

⁸⁵ In quanto, il cerchio di centro M e raggio ME , interseca il cerchio dato in due punti distinti, con i quali è possibile determinare due cerchi.

⁸⁶ *Apollonius Gallus*, Problema VIII.

⁸⁷ *Le ricostruzioni apolloniane in Viète e in Ghetaldi*, pp. 87 – 88.

⁸⁸ Paragrafo 1.6.

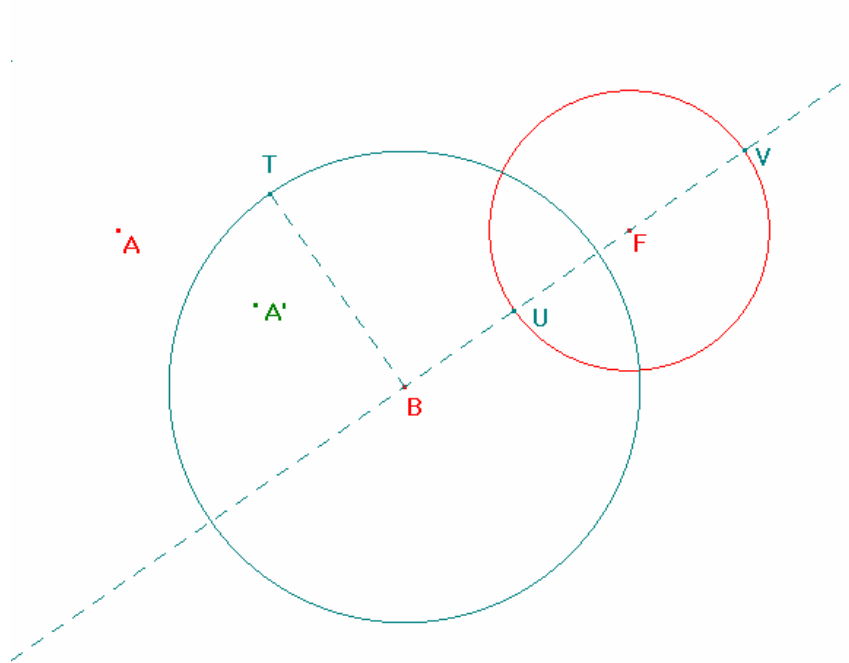


Figura 9

In particolare, ricordando che ogni tangente a un cerchio è perpendicolare al raggio passante per il punto di contatto, ho disegnato il **cerchio** di diametro $A'F$ (fig. 10), come cerchio di centro il **punto medio** M di A' e F , passante per A' , e le **rette** che uniscono A' ai **punti di intersezione** R e S , di tale cerchio con il cerchio γ ⁸⁹.

Considerata una delle due rette tangenti, ad esempio $A'R$, per quanto detto precedentemente, per ottenere il cerchio cercato, occorre costruire la sua immagine mediante l'inversione considerata. Poiché tale immagine, è il cerchio passante per A , B e $I_{B,r}(R)$, dopo aver determinato l'**immagine** $R' = I_{B,r}(R)$, del punto R rispetto all'inversione rappresentata da Γ (fig. 11), ho determinato uno dei cerchi che soddisfano le condizioni del problema, applicando la *macro* **Cerchio per tre punti**⁹⁰, ai punti A , B e R' .

⁸⁹ Tali rette sono tangenti a γ , in quanto, i triangoli $A'RF$ e $A'SF$ sono rettangoli essendo inscritti in un semicerchio, pertanto $A'R$ è perpendicolare a FR e quindi tangente a γ in R , e $A'S$ è perpendicolare a FS e quindi tangente a γ in S .

⁹⁰ Paragrafo 1.6.

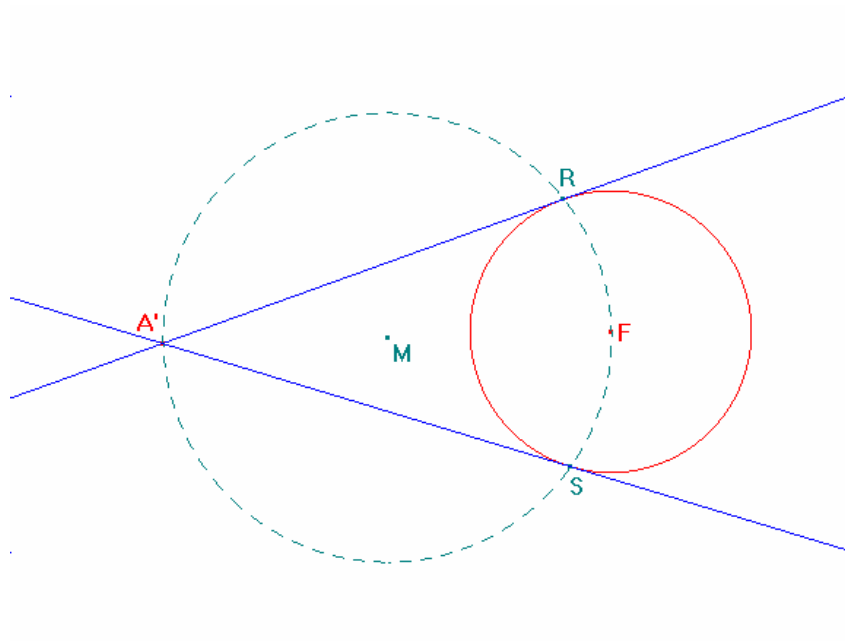


Figura 10

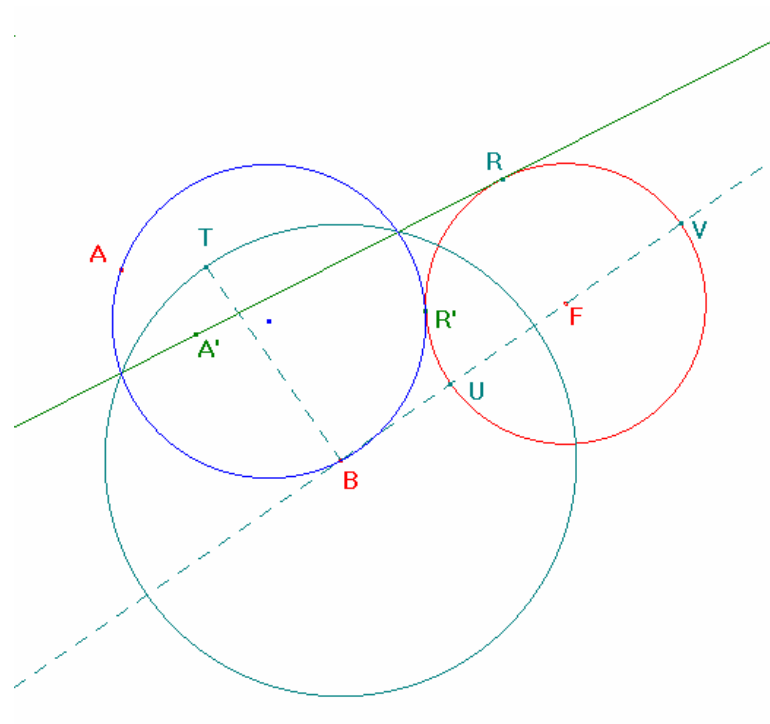


Figura 11

Ripetendo la costruzione con l'altra tangente $A'S$, ho determinato il secondo cerchio che risolve il problema (fig. 12), tuttavia ho osservato che malgrado la costruzione eseguita sia più semplice della costruzione descritta da Newton, essa è incompleta perché è inapplicabile nel caso in cui i punti A e B sono interni al cerchio γ . In tal caso, infatti, se il punto A' è anch'esso interno a γ , è impossibile condurre le tangenti, se al contrario esso è esterno (fig. 13), vengono costruiti dei cerchi che non soddisfano le condizioni del problema.

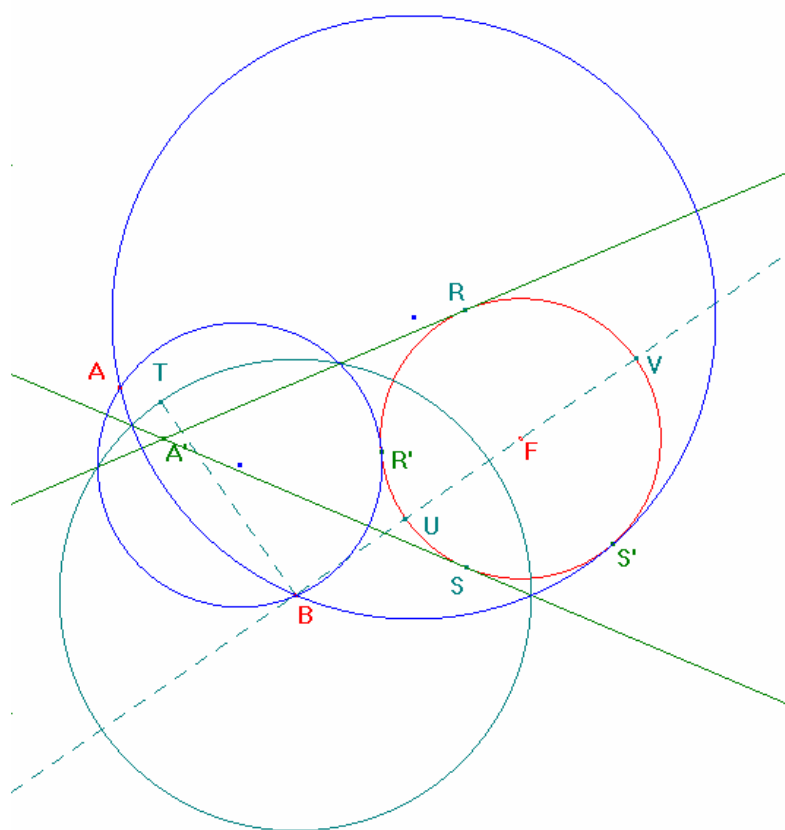


Figura 12

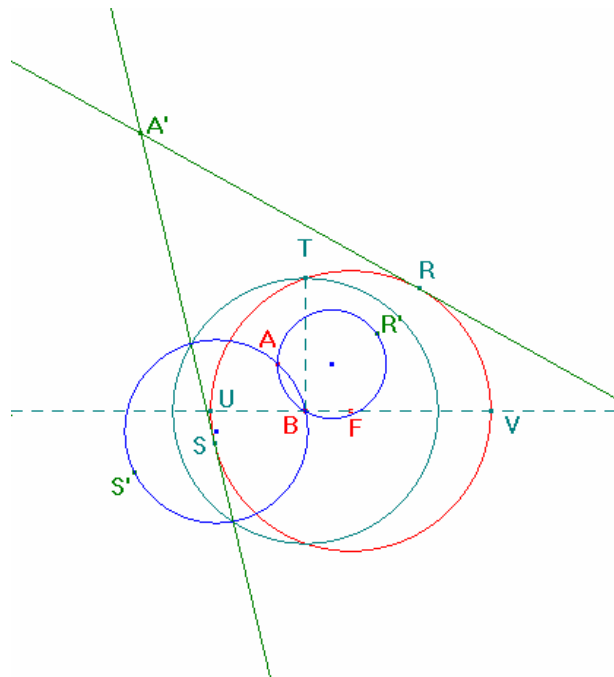


Figura 13

Per eseguire la costruzione indicata da Newton, dopo aver disegnato un **cerchio** γ di centro F , e due **punti** A e B (fig. 14), che rappresentano i dati iniziali del problema, ho dunque disegnato il **punto medio** A' , dei punti A e B , la **retta** r , passante per tali punti, la **retta** s , passante per i punti B e F , la **retta perpendicolare** t , alla retta r passante per F , il **punto d'intersezione** G , di tale retta con r , i **punti d'intersezione** O e N , di s con il cerchio γ , e il **simmetrico** G' , di G rispetto ad A' . Fatto ciò, poiché il segmento BM è tale che $2A'G : BO = BN : BM$, per determinare il quarto proporzionale di $2A'G$, BO e BN , ho **riportato** i segmenti BO e BN , sul punto G , e, dopo aver individuato il **punto** O' su t , e il **punto** N' su r , ho disegnato il **segmento** $G'O'$, e il **punto d'intersezione** M' , della retta t con la **retta parallela** a tale segmento passante per N' . Infatti, poiché il **segmento** GM' è tale che $GG' : GO' = GN' : GM'$ ⁹¹, essendo $GO' = BO$, $GN' = BN$ e $GG' = 2A'G$, esso è

⁹¹ Tale proporzione segue dalla similitudine dei triangoli rettangoli $G'GO'$ e $N'GM'$.

tale che $2A'G:BO = BN:GM'$ ⁹², ovvero, per l'unicità del quarto proporzionale, ha lunghezza uguale a quella di BM .

Sebbene a questo punto, per determinare il punto M dovrebbe essere sufficiente riportare GM' sul punto B , in tal modo nasce un'ambiguità, in quanto si individuano due punti che si alternano nel ruolo del punto M , al variare della configurazione in cui si presentano i punti dati A e B , e il cerchio dato γ .

Tuttavia, poiché M è il punto d'intersezione della retta r , con la tangente ME comune al cerchio dato γ e al cerchio cercato, in particolare dei due punti determinati, M deve coincidere con il punto appartenente alla semiretta $A'G$, se i punti A e B sono esterni a γ , e con il punto appartenente alla semiretta $A'G'$, se i punti A e B sono interni a γ . Pertanto, per eliminare ogni indecisione e costruire una figura che dà luogo in entrambi i casi ai cerchi che soddisfano le condizioni del problema, ho definito un punto K che coincide con G o G' , a seconda che i punti A e B siano ambedue interni o esterni a γ , e ho poi definito M come punto d'intersezione del cerchio compasso, di centro B e raggio GM' , con la semiretta $A'K$.

⁹² Per non ripetere tale costruzione tutte le volte che è necessario determinare il quarto proporzionale di tre segmenti, ho definito la *macro* **Quarto proporzionale**, evidenziando i segmenti GG' , GO' e GN' come oggetti iniziali, e il segmento GM' come oggetto finale.

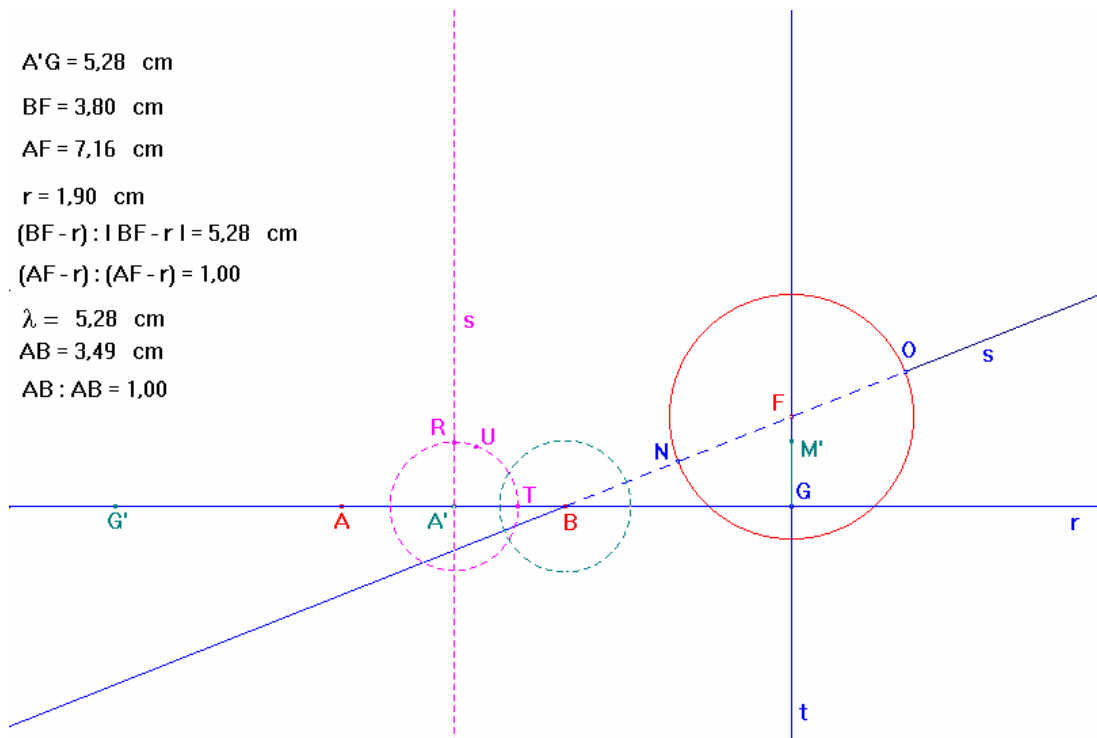


Figura 15

E, dopo aver definito un **sistema di assi** cartesiani, di origine A' , con asse delle ascisse coincidente con la retta r ⁹³, ho individuato il punto K **riportando** sull'asse delle ascisse di tale sistema il valore di λ (fig. 16). Definito poi M , come **punto d'intersezione** del cerchio compasso, di centro B e raggio GM' , con la **semiretta** $A'K$ ⁹⁴, ho determinato, con la *macro* **Medio proporzionale**, il medio proporzionale MI tra i segmenti AM e BM , e, dopo aver

⁹³ Per definire un sistema di assi con *CABRI*, oltre all'origine, è necessario individuare due punti che fissano l'unità di misura su ciascun asse. Pertanto, dopo aver riportato un segmento di lunghezza unitaria sul punto A' , individuando un punto U (fig. 15), ho disegnato il **cerchio** di centro A' passante per U , i suoi **punti d'intersezione** T e R , rispettivamente con la retta r e con la **retta perpendicolare** alla retta r passante per A' , e infine ho definito il **sistema di assi** $A'TR$. Per determinare l'unità di misura degli assi, ho **calcolato** il rapporto della **distanza** di A da B , su se stessa, che è sempre uguale a 1 in quanto tali punti non possono coincidere. Il motivo per cui non ho usato il comando **numeri**, consiste nell'esigenza di non introdurre nuovi elementi nella costruzione, al fine di creare una *macro* relativa al problema in esame i cui oggetti iniziali sono soltanto i punti A e B , e il cerchio γ .

⁹⁴ Poiché la posizione del punto K sulla retta r , rispetto al punto A' , dipende dal segno di λ , tale semiretta coincide con la semiretta $A'G$, se i punti A e B sono esterni a γ , e con la semiretta $A'G'$, se i punti A e B sono interni a γ .

[illegible]

86

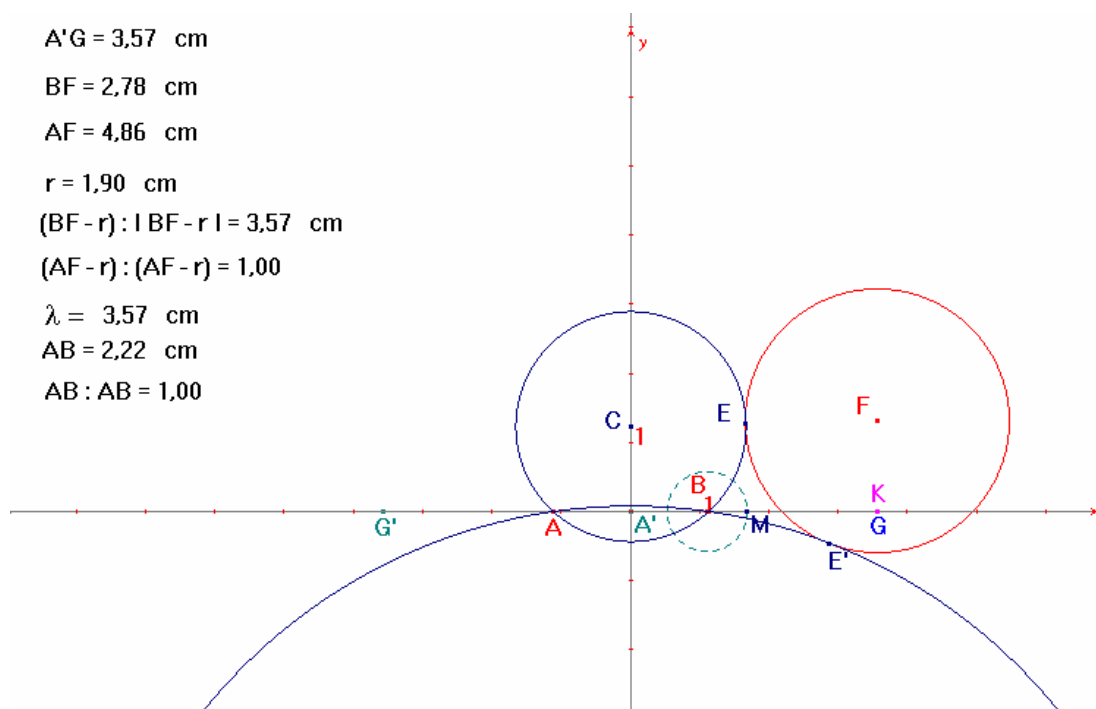


Figura 17

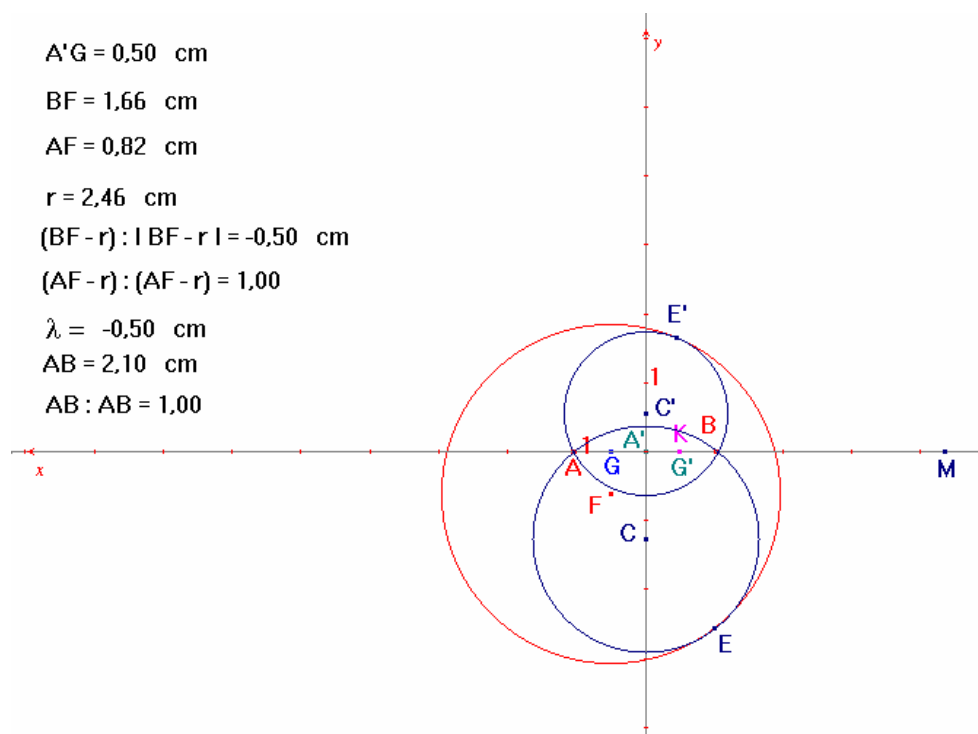


Figura 18

Analizzando la figura ottenuta per verificarne la correttezza, ho tuttavia appurato che quando A e B sono l'uno interno e l'altro esterno a γ , o quando uno dei due punti giace sulla circonferenza di γ , o ancora quando A e B giacciono sulla circonferenza di un cerchio concentrico a γ , la costruzione dà luogo a cerchi che non soddisfano le condizioni del problema oppure a nessun cerchio. Nel primo caso, la comparsa di cerchi errati è dovuto all'esistenza di λ , e quindi del punto K , che permette il completamento della costruzione (fig. 19), al contrario nel secondo caso, è proprio la sua inesistenza a non dar luogo ad alcun cerchio (fig. 20). Infine, nel terzo caso, i punti G , A' e G' coincidono, pertanto la non esistenza della semiretta $A'K$ non permette il compimento della costruzione (fig. 21).

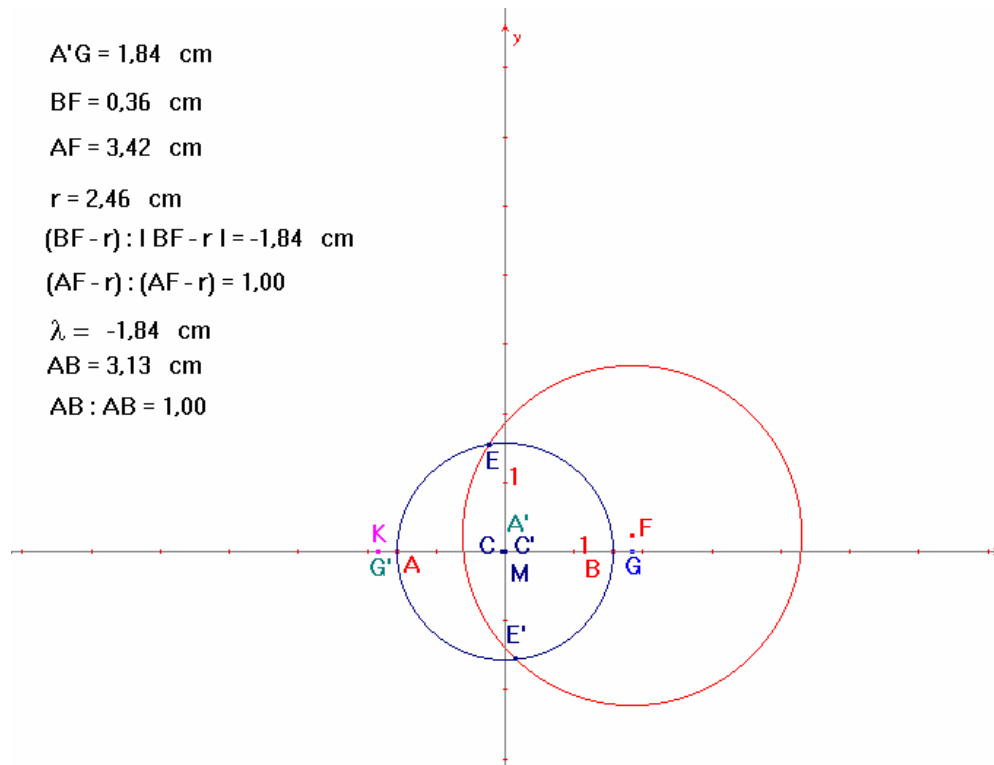


Figura 19

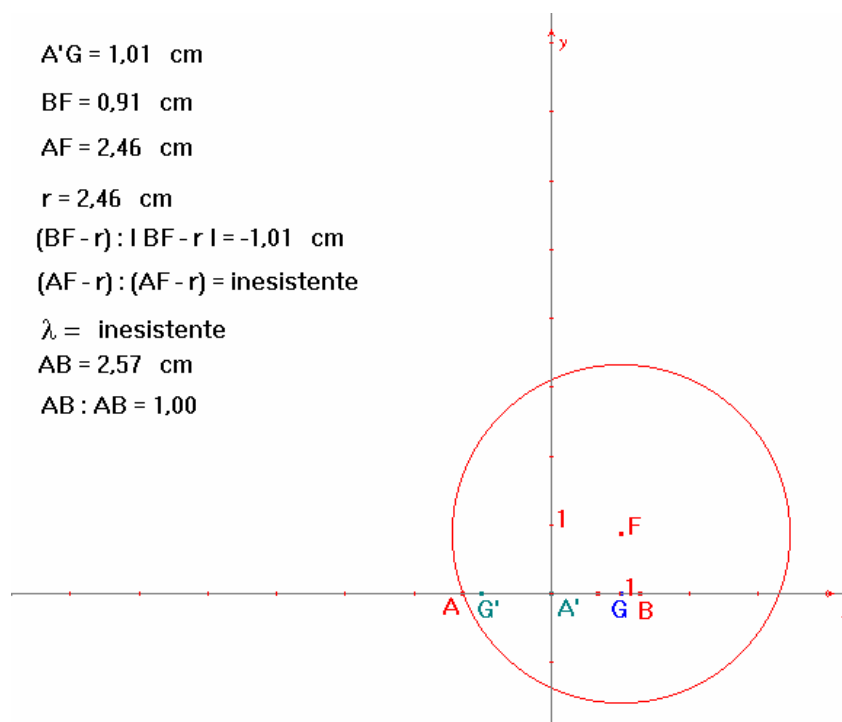


Figura 20

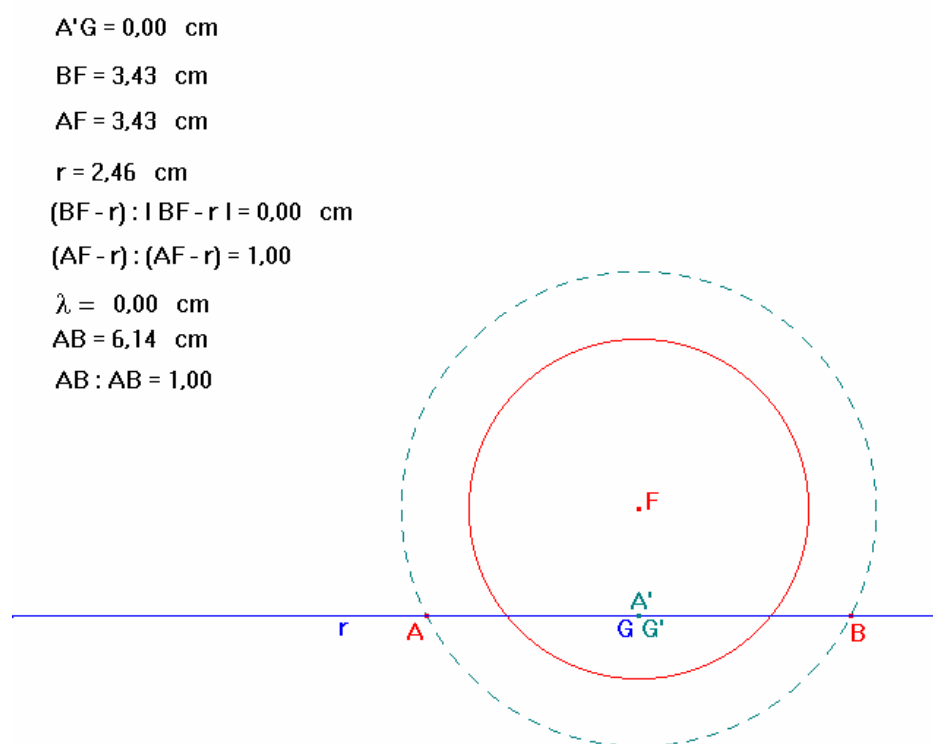


Figura 21

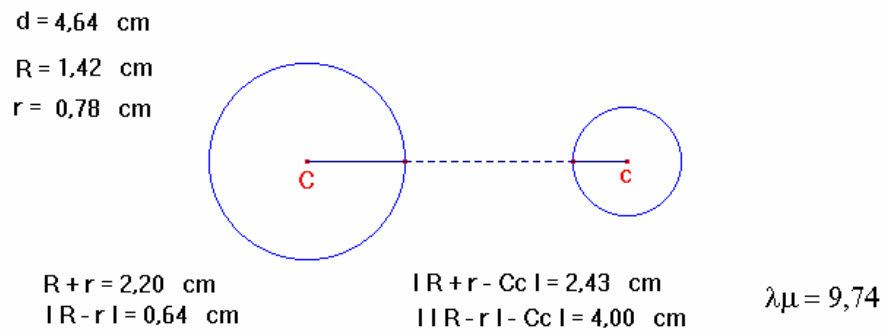
Per poter ovviare a tali inconvenienti, ho invalidato la costruzione dei cerchi errati nella figura costruita e ho analizzato i casi sopraindicati costruendo delle nuove figure. Poi ho definito delle *macro* relative a ciascuna di tali figure, e infine, applicandole simultaneamente ho ottenuto una figura interattiva corretta e completa che illustra il problema in esame.

In particolare, per invalidare la costruzione dei cerchi errati, ho creato una *macro*, simile alla *macro* **Cerchio e retta tangenti?**⁹⁵, che permette di stabilire se due cerchi sono tangenti, internamente o esternamente, mediante l'apparizione di un numero uguale a 1 in caso di risposta affermativa e inesistente in caso contrario. Più precisamente, poiché due cerchi sono tangenti se la distanza dei loro centri è uguale alla somma o alla differenza dei loro raggi, dopo aver disegnato in un nuovo foglio di *CABRI*, due cerchi di centro C e c (fig. 22), ho **misurato** la distanza d , dei loro centri, e la lunghezza dei loro raggi R e r , come distanze di C e c dalle circonferenze corrispondenti, e, dopo aver **calcolato** le quantità $\lambda = |R + r - d|$ e $\mu = ||R - r| - d|$, osservando che il loro prodotto è nullo solo se i due cerchi

sono tangenti, ho **calcolato** la quantità $\frac{\ln(10^{-5} - \lambda\mu)}{\ln(10^{-5} - \lambda\mu)}$, che è uguale a 1 oppure inesistente, a seconda che i cerchi considerati siano tangenti oppure no.

Definita dunque la *macro* **Cerchi tangenti?**, evidenziando i cerchi di centro C e c , come oggetti iniziali, e il numero $\frac{\ln(10^{-5} - \lambda\mu)}{\ln(10^{-5} - \lambda\mu)}$ come oggetto finale, l'ho applicata alle coppie di cerchi $\gamma - ABE$ e $\gamma - ABE'$, nella figura relativa alla costruzione dei cerchi che soddisfano le condizioni del problema in esame (fig. 23), e, dopo aver **misurato** i raggi r_1 e r_2 di ABE e ABE' , come **distanza** dei loro centri C e C' , dalle rispettive circonferenze, ho **calcolato** i prodotti, n_1 e n_2 , di ciascun raggio per il corrispondente esito della *macro*.

⁹⁵ Paragrafo 1.6.



Sono tangenti ? : inesistente

Figura 22

Trasportando n_1 su C , e n_2 su C' , ho poi individuato due punti L e L' , e quindi i **cerchi** Γ e Γ' , di centro C e C' passanti per essi, che esistono soltanto se i punti A e B , sono ambedue interni, o esterni al cerchio γ .

Pertanto, dopo aver **nascosto** i punti C e C' , che appaiono anche se A e B sono l'uno interno e l'altro esterno a γ , evidenziando A , B e γ come oggetti iniziali, e i cerchi ABL e ABL' come oggetti finali, ho definito la **macro Cerchi per due punti tangenti un cerchio** – **I**, che funziona correttamente e dà luogo ad entrambi i cerchi che soddisfano le condizioni del problema se i punti dati sono ambedue interni, o esterni, al cerchio dato.

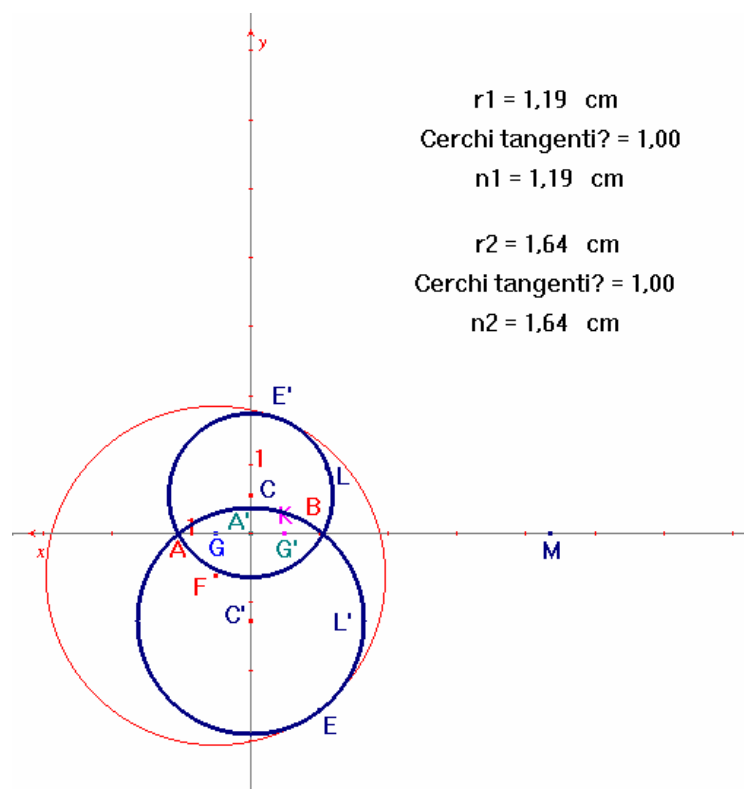


Figura 23

Come per la *macro Cerchio e retta tangenti?*, l'uso della *macro Cerchi tangenti?* è finalizzato alla costruzione dei soli cerchi che soddisfano le condizioni del problema, pertanto, per non ripetere la costruzione che segue alla sua applicazione, evidenziando i cerchi *ABE* e γ come oggetti iniziali, e il cerchio di centro *C* passante per *L*, come oggetto finale, ho definito la *macro Cerchio soltanto se tangente cerchio*, che evidenziati due cerchi dà luogo a un cerchio, sovrapposto al primo, solo se i cerchi evidenziati sono tangenti.

Per costruire l'unico cerchio che risolve il problema nel caso in cui uno dei punti dati giace sulla circonferenza del cerchio dato, dopo aver disegnato un **punto** *A*, un **cerchio** γ , di centro *F* (fig. 24), e un **punto** *B* sulla circonferenza di γ , ho definito un punto *H*, che coincide con *B* in quanto punto che giace su γ , al fine di creare una *macro* relativa al caso in questione che risolva il problema indipendentemente dall'ordine con cui vengono evidenziati i punti dati. Più precisamente, dopo aver **misurato** le distanze, d_A e d_B , di *A* e

B dalla circonferenza di γ , ho calcolato il numero $\mu = \frac{d_A - d_B}{|d_A - d_B|} = \begin{cases} \text{inesistente} & \text{se } d_A = d_B \\ +1 & \text{se } d_A > d_B \\ -1 & \text{se } d_A < d_B \end{cases}$,

che in particolare è uguale a $+1$, se B giace su r , e a -1 , se A giace su r . Poi, ho disegnato il **cerchio** di centro il **punto medio** M , di A e B , passante per B , e il suo **punto d'intersezione** Z , con l'**asse** di A e B , e ho definito il **sistema di assi** MBZ , che ha origine in M , e unità di misura uguale alla **lunghezza** del **segmento** MB . E infine, **riportando** μ sull'asse delle ascisse, ho determinato il punto H che data la scelta del sistema di assi, coincide con il punto dato che giace sulla circonferenza di γ .

Disegnati dunque, la **retta perpendicolare** t , al **segmento** HF , passante per H , e il **simmetrico** H' , di H rispetto a M , ho determinato, con la **macro Cerchi per due punti tangenti una retta**, il cerchio \mathcal{C} , tangente a t , e passante per H e H' , che per come è stato costruito è tangente in H , e quindi in A o in B , al cerchio γ , internamente o esternamente, a seconda che il secondo punto dato, sia interno o esterno a γ .

Poiché anche in tal caso la costruzione dà luogo a cerchi errati, se nessuno dei punti dati appartiene alla circonferenza di γ , ho applicato alla coppia di cerchi $\mathcal{C}-\gamma$, la **macro Cerchio soltanto se tangente cerchio**, e ho così determinato il **cerchio** di centro C passante per J , che esiste soltanto se uno dei punti A o B , giace sulla circonferenza di γ . **Nascosto** il punto C , che appare anche se nella costruzione né A , né B giacciono sulla circonferenza di γ , ho poi evidenziato A , B , e γ come oggetti iniziali, e l'ultimo cerchio disegnato come oggetto finale, e ho così definito la **macro Cerchi per due punti tangenti un cerchio – II**, che funziona correttamente se almeno uno dei punti evidenziati giace sulla circonferenza di γ , e non dà soluzioni in caso contrario.

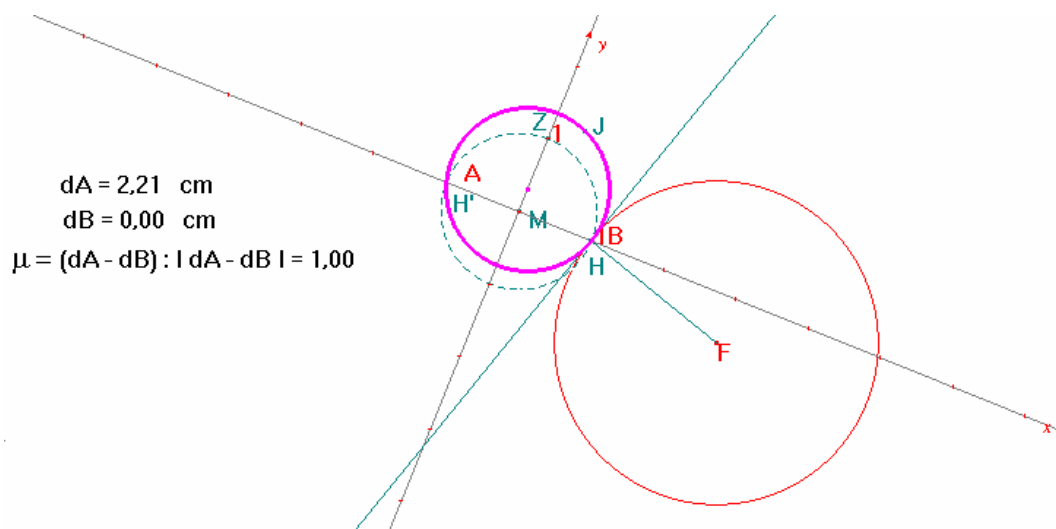


Figura 24

Per completare la costruzione, e determinare i cerchi che risolvono il problema nel caso in cui i punti dati appartengano ad un cerchio concentrico al cerchio dato, ho disegnato su un nuovo foglio di *CABRI*, un **cerchio** γ , di centro F , e due **punti** A e B , che ho disposto in modo che giacciono sulla circonferenza di un cerchio di centro F (fig. 25). Poi, ho determinato i **punti d'intersezione** E e E' , dell'**asse** del segmento avente per estremi A e B , con il cerchio γ , e infine, ho determinato, mediante la *macro* **Cerchio per tre punti**, i cerchi passanti per A , B , E , e A , B , E' , che per come sono stati costruiti sono tangenti, rispettivamente in E e E' , al cerchio γ .

Poiché la costruzione eseguita, se A e B non giacciono sulla circonferenza di un cerchio di centro F dà luogo a cerchi errati, come in precedenza, ho applicato la *macro* **Cerchio soltanto se tangente cerchio** alle coppie di cerchi $ABE-\gamma$ e $ABE'-\gamma$, determinando così il cerchio di centro C passante per V , e il cerchio di centro C' passante per V' , che soddisfano le condizioni del problema ma esistono soltanto se A e B giacciono su un cerchio di centro F .

Dopo aver **nascosto** i punti C e C' , che appaiono anche se A e B non giacciono su un cerchio di centro F , ho evidenziato A , B e γ come oggetti iniziali, e gli ultimi cerchi disegnati come oggetti finali, e ho quindi definito la *macro* **Cerchi per due punti tangenti un cerchio – III**, che funziona correttamente se i punti dati giacciono sulla circonferenza di un cerchio concentrico al cerchio dato, e non dà soluzioni in caso contrario.

E, dal momento che i tre casi analizzati esauriscono tutte le configurazioni possibili dei due punti e del cerchio dati, dopo aver disegnato in un nuovo foglio di *CABRI*, due punti e un cerchio, ho applicato a essi le *macro* **Cerchi per due punti tangenti un cerchio – I, II e III** (fig. 26), e ho così ottenuto un disegno interattivo che illustra esaurientemente il problema in esame⁹⁶.

In tale disegno compaiono sempre entrambi i cerchi che risolvono il problema, eccetto, come è giusto che sia, nel caso in cui i punti *A* e *B*, giacciono entrambi sulla circonferenza di γ , o sono l'uno interno e l'altro esterno ad essa, tuttavia, con lo spostamento manuale dei punti *A* e *B*, sulla circonferenza del cerchio, allo scopo di visualizzare il cerchio che in tal caso risolve il problema, non si produce l'effetto desiderato. Per poter ovviare a tale inconveniente, ho deciso di illustrare il problema in esame mediante due figure interattive distinte, **ridefinendo**, nella seconda di tali figure, il punto *A* come punto sulla circonferenza del cerchio dato⁹⁷ (fig. 27).

Infine, in entrambe le figure ho inserito una casella di testo per indicare quali sono gli oggetti mobili, e come possono essere spostati.

⁹⁶ Le *macro* **Cerchi per due punti tangenti un cerchio - I, II e III** sono state definite dopo aver nascosto i centri dei cerchi finali, pertanto per far apparire i centri dei cerchi che soddisfano le condizioni del problema nel disegno interattivo, li ho ricostruiti come punti d'intersezione degli assi di due corde fissate su ogni singolo cerchio.

⁹⁷ Il caso in cui *A* e *B* giacciono su una circonferenza di centro *F*, mediante il movimento manuale dei punti *A* e *B*, non si presenta mai, tuttavia, esso non rappresenta un caso particolare dal punto di vista geometrico, ma solo da quello costruttivo, pertanto non ho ritenuto opportuno rappresentarlo con una figura interattiva distinta.

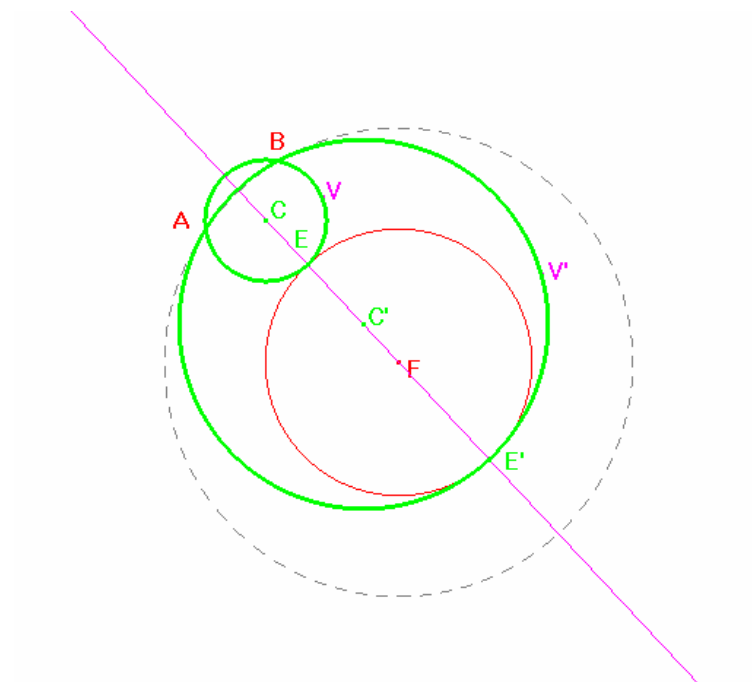


Figura 25

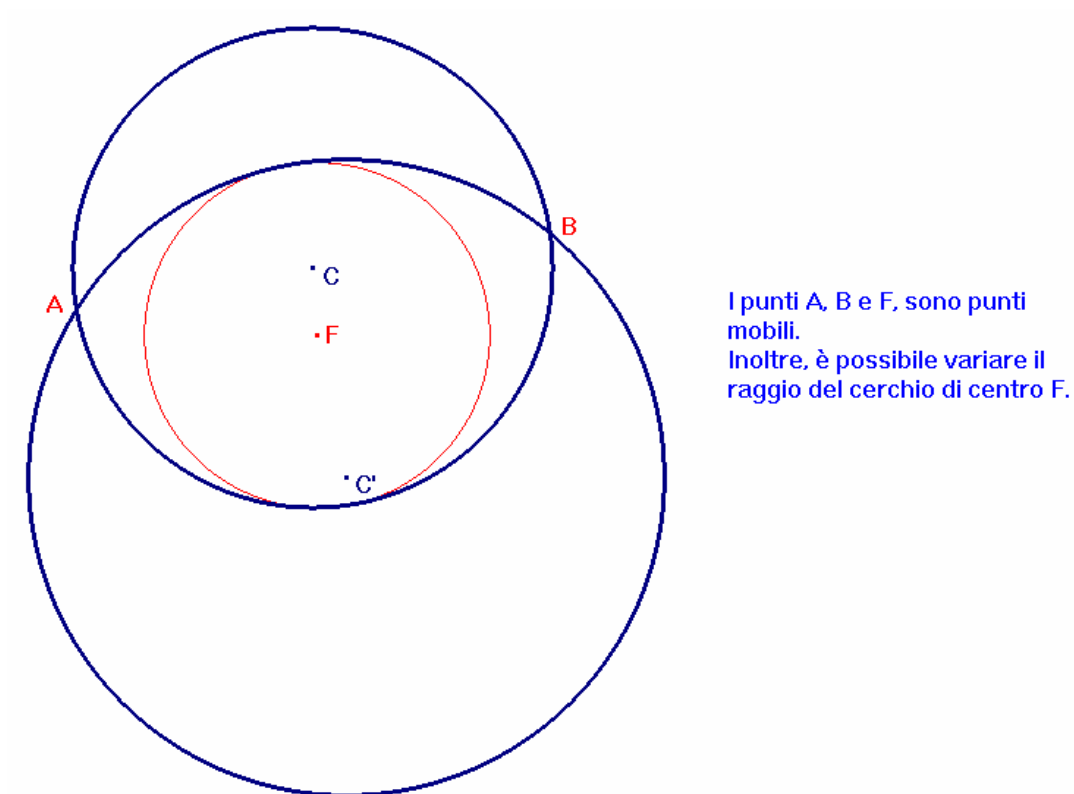


Figura 26

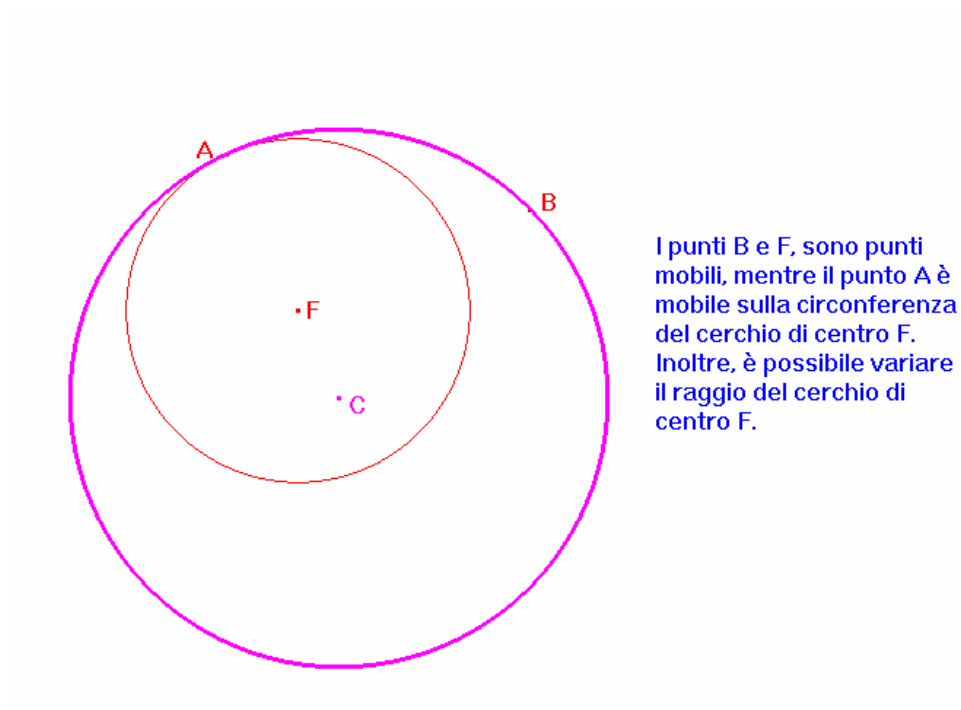


Figura 27

Poiché la costruzione del Problema XXI⁹⁸ e del Problema XLVII⁹⁹, viene ricondotta al problema in esame, ho ritenuto opportuno definire una *macro* che evidenziati due punti e un cerchio, dia luogo a tutti e soli i cerchi che passano per i due punti e sono tangenti al cerchio. Evidenziati dunque (nella prima figura interattiva), i punti A e B e il cerchio di centro F, come oggetti iniziali, e i cinque cerchi ottenuti con l'applicazione delle tre *macro*, come oggetti finali, ho definito la *macro* **Cerchi per due punti tangenti a un cerchio**.

⁹⁸ Paragrafo 1.3.

⁹⁹ È il problema dei *Contatti* relativo a un punto e due cerchi.

1.9 Problema XLVI

Descrivere un cerchio che passi per un punto dato, tocchi un cerchio dato, e una retta data di posizione.

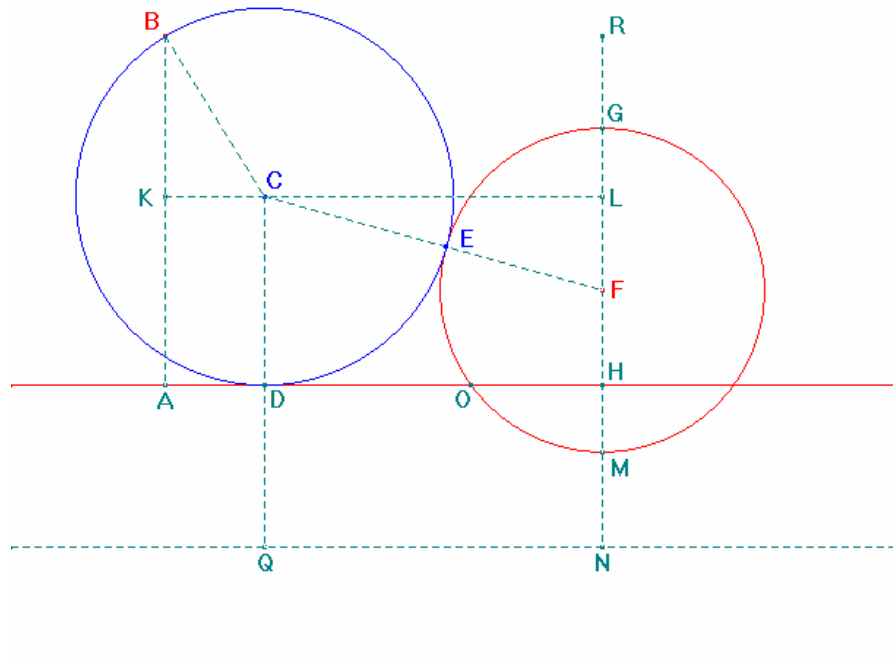


Figura 1

Per risolvere il problema Newton si propone di determinare il cerchio BD , di centro C , che passa per il punto dato B , ed è tangente alla retta data AD , e al cerchio dato GEM , di centro F , rispettivamente nei punti D e E .

A tal fine, prolungato CD fino al punto Q in modo tale che $DQ = EF$, e disegnata la retta QN , passante per Q e parallela ad AD , egli indica con A la proiezione di B sulla retta data, con K la proiezione di C sulla retta per B perpendicolare alla retta data, con N la proiezione di F su QN , con L la proiezione di C sulla retta per F perpendicolare alla retta data, e con H , G e M , i punti in cui FN incontra rispettivamente la retta AD e il cerchio GEM .

Scelta come incognita $CK = y$, e prolungato HG in modo che $HR = AB$, pone poi, in accordo con i *DATI* di Euclide, $AB = a$, $FN = b$, $KL = c$ e $RM = d$, e, determinata

un'ulteriore espressione di RM , in funzione dei termini noti e dell'incognita, la eguaglia alla quantità d , ottenendo l'equazione:

$$(a-b)y^2 - 2acy - abd - ac^2 = 0$$

Determinate le sue soluzioni:

$$y = \frac{ac}{a-b} \pm \frac{\sqrt{a^2bd - ab^2d + abc^2}}{a-b}$$

e osservato che, posto $c:b::d:e$ e $a-b:a::c:f$, si ha più semplicemente:

$$y = f \pm \sqrt{f^2 + fe - fc},$$

egli conclude la risoluzione del problema mostrando come, noto $y = KC = AD$, si possa determinare DC , e quindi il centro C , del cerchio cercato.

Poiché nella rappresentazione considerata il cerchio e la retta dati sono secanti, il problema ammette due soluzioni che possono essere individuate mediante le due radici dell'equazione risolvente. Tuttavia, cambiando la posizione del cerchio e della retta dati in modo che essi non siano secanti, le soluzioni del problema sono quattro, pertanto la risoluzione di Newton è incompleta.

Nel Problema IV del *Quaestionum Solutio Geometrica*¹⁰⁰, in cui egli risolve geometricamente il problema, determina invece tutte le soluzioni, riducendolo alla determinazione di un cerchio passante per due punti e tangente una retta.

Più precisamente, disegnati un punto B , una retta AD , e un cerchio di centro F (fig. 2), egli suppone di aver già risolto il problema, e osserva che, posto $CQ = CF = CS$, si ha che:

$$AB = 2CD - AH' \quad \text{e} \quad NF = 2CQ - NS^{101}$$

e quindi che:

$$AB - NF = 2CD - AH' - 2CQ + NS.$$

Sommato $2DQ$ ad ambo i membri dell'ultima uguaglianza, ottiene poi:

¹⁰⁰ *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. IV, pp. 256 – 259.

¹⁰¹ $NF = NL - FL = CQ - FL = CQ - LS + CQ - CQ = 2CQ - LS - NL = 2CQ - (NL + LS) = 2CQ - NS$

$$AH - 2AD + (AB - HK) \times \frac{AD^2}{AB \times AH} = \frac{HK \times bk}{AH},$$

che, detti V e P i punti tali che si abbia:

$$AB - HK : AH = AB : AV \quad \text{e} \quad AH : HK = bk : HP,$$

diviene:

$$AH - 2AD + \frac{AD^2}{AV} = HP,$$

ovvero:

$$AD^2 - 2AD \times AV + AV^2 = AV \times PV^{105},$$

ovvero ancora:

$$DV (= -AD + AV) = \sqrt{AV \times PV}^{106}.$$

Pertanto, disegnato BK che incontra AH in V^{107} , preso HP in AH (nella direzione di A se HK giace su b , e nella direzione opposta altrimenti), in modo tale che $AH : HK = bk : HP$, e preso DV medio proporzionale tra AV e PV , egli desume che il cerchio cercato è il cerchio passante per il punto dato B , che tocca la retta AH in D . E, osservato che il problema in questione ammette in generale quattro soluzioni¹⁰⁸, conclude la risoluzione precisando che due di esse sono impossibili quando il cerchio dato e la retta data sono secanti, ossia quando il punto V cade tra A e P^{109} .

¹⁰⁵ Basta sommare AV^2 ad ambo i membri, e osservare che $AV \times PV = AV(AV - AP) = AV^2 - AV \times AP = AV^2 - AV(AH - HP) = AV \times HP - AV \times AH + AV^2$

¹⁰⁶ Nel manoscritto Newton scrive $AV * PV$, usando il simbolo $*$ al posto della m che sta per medio proporzionale. Inoltre, poiché detto Q' il punto d'incontro della retta BV con la perpendicolare per P al segmento BV , si ottengono i triangoli BAV e $PQ'V$, simili in quanto rettangoli e con un angolo in comune, si ha che $BV \times Q'V = AV \times PV = DV^2$, da cui segue, come si vede nel disegno, che il cerchio cercato passa per Q' . *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. IV, p. 258, nota 30.

¹⁰⁷ Il punto V è il punto d'incontro della retta BK con la retta data, in quanto, essendo i triangoli ABV e BKb simili, per il primo criterio, si ha che $bK : Bb (= AH) = AB : AV$, che avendosi $AB - HK = bK$, dà $AB - HK : AH = AB : AV$, ovvero la proporzione che definisce V .

¹⁰⁸ La costruzione si può ripetere scambiando i ruoli dei punti k e K , inoltre il problema cui quello in esame è ricondotto con la determinazione di Q' , ha due soluzioni. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. IV, p. 259, nota 31.

¹⁰⁹ *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. IV, p. 259, nota 32.

Dal momento che la risoluzione geometrica, non distinguendo il caso secante dal caso esterno, consente di determinare tutti i cerchi che risolvono il problema in ambedue i casi, al fine di realizzare un disegno interattivo relativo al problema in esame, ho eseguito con *CABRI* la costruzione indicata da Newton.

Disegnati dunque, un **punto** B , una **retta** r , e un **cerchio** \mathcal{C} di centro F (fig. 3), che rappresentano i dati iniziali del problema, ho disegnato il **punto d'intersezione** A , della retta r con la **retta perpendicolare** a r passante per B , la **retta perpendicolare** t , a r passante per F , il **punto d'intersezione** H , della retta t con la retta r , e i **punti d'intersezione** K e k , della retta t con il cerchio dato \mathcal{C} . Individuato poi, il punto d'intersezione b , della retta t con la **retta perpendicolare** a t , passante per B , ho disegnato i **segmenti** AH , HK , e bK , e, con la *macro Quarto proporzionale*¹¹⁰, ho determinato il segmento HP' tale che, $AH : HK = bk : HP$.

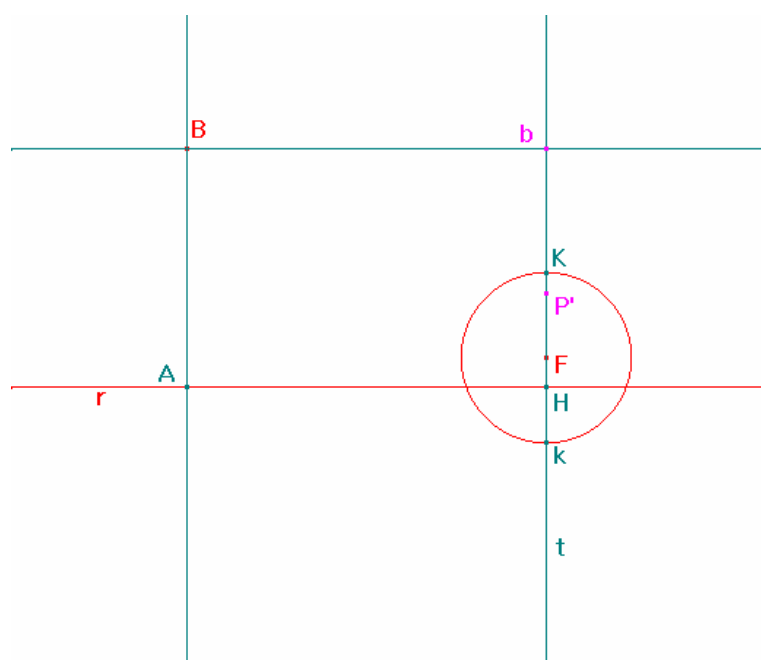


Figura 3

¹¹⁰ Paragrafo 1.8, nota 92.

A questo punto poiché intersecando il cerchio di centro H passante per P' con la retta r si determinano due punti, dei quali il punto P è quello più vicino al punto A , se HK giace su b (ossia se B e F giacciono nello stesso semipiano di origine r), e quello più lontano, in caso contrario, al fine di individuare P , ho disegnato la **retta BH** (fig. 4), il **simmetrico F'** , di F rispetto a tale retta, l'**arco di circonferenza** individuato dai due **punti di intersezione** della retta BH con il **cerchio** di centro H passante per P' , e dal **punto di intersezione** della **semiretta HF'** con lo stesso cerchio, e quindi ho definito P come **punto di intersezione** della retta r con l'arco di circonferenza. Tale costruzione risolve l'ambiguità in quanto il punto F' giace nello stesso semipiano di origine HB in cui si trova A , solo se B e F appartengono allo stesso semipiano di origine r (fig. 5).

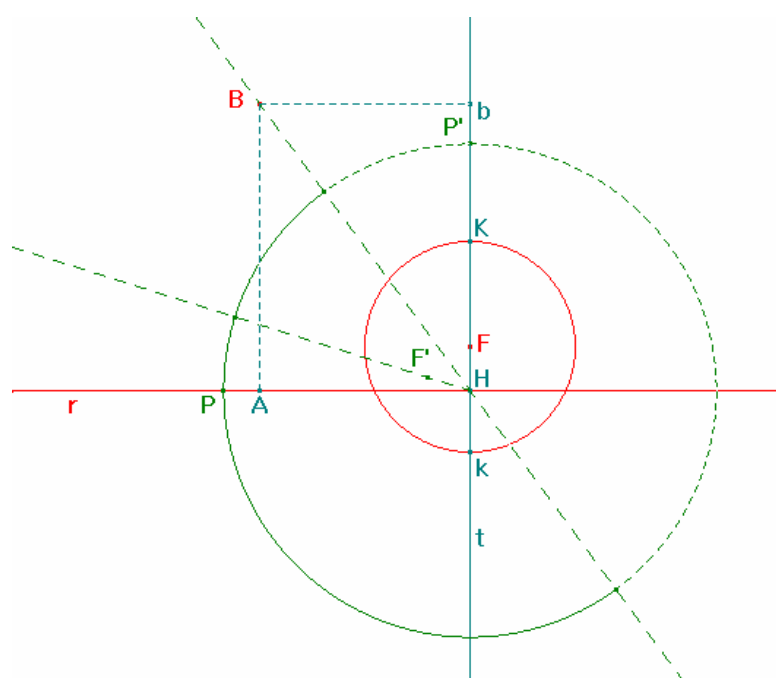


Figura 4

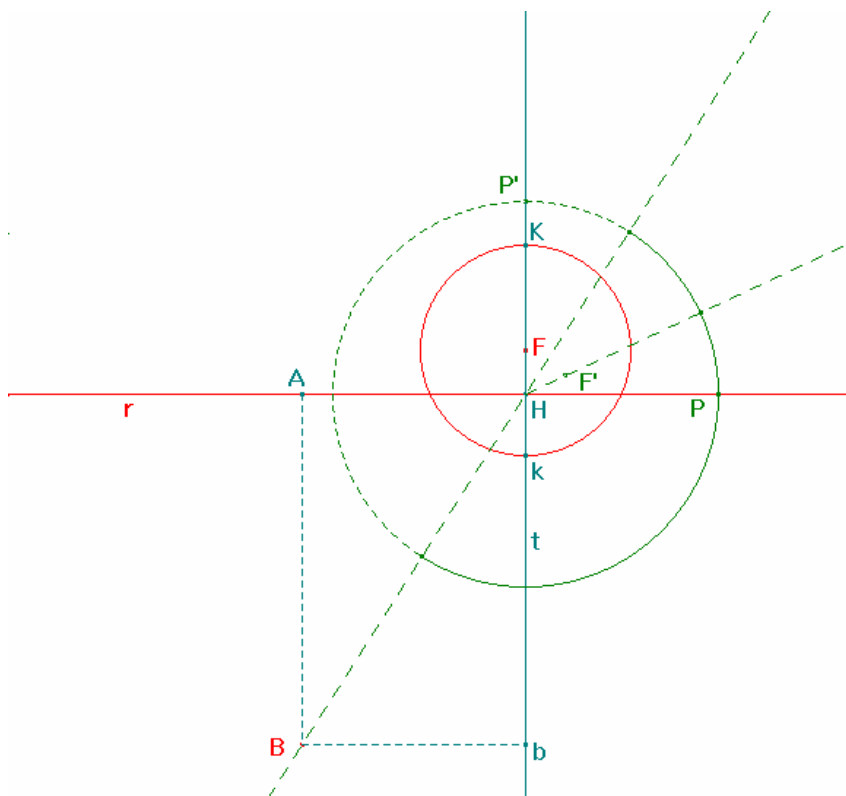


Figura 5

Sebbene con la conoscenza di P Newton determini il punto di contatto del cerchio cercato con la retta r , come già osservato, noto P è possibile determinare il punto Q' (fig. 6), tra l'altro presente nella figura che accompagna la risoluzione di Newton, che oltre ad essere il piede della perpendicolare condotta da P alla retta BK , è un punto del cerchio cercato. Pertanto, condotta da P la **retta perpendicolare** alla retta BK , e disegnato il loro **punto d'intersezione** Q' , ho applicato la *macro Cerchi per due punti tangenti una retta*¹¹¹, alla retta r e ai punti B e Q' , determinando così due cerchi che soddisfano le condizioni del problema (fig. 7).

¹¹¹ Paragrafo 1.6

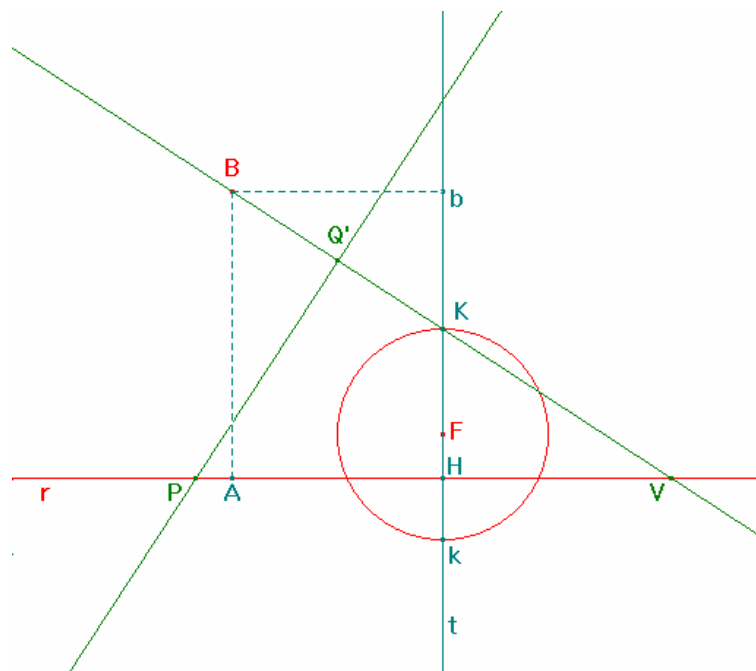


Figura 6

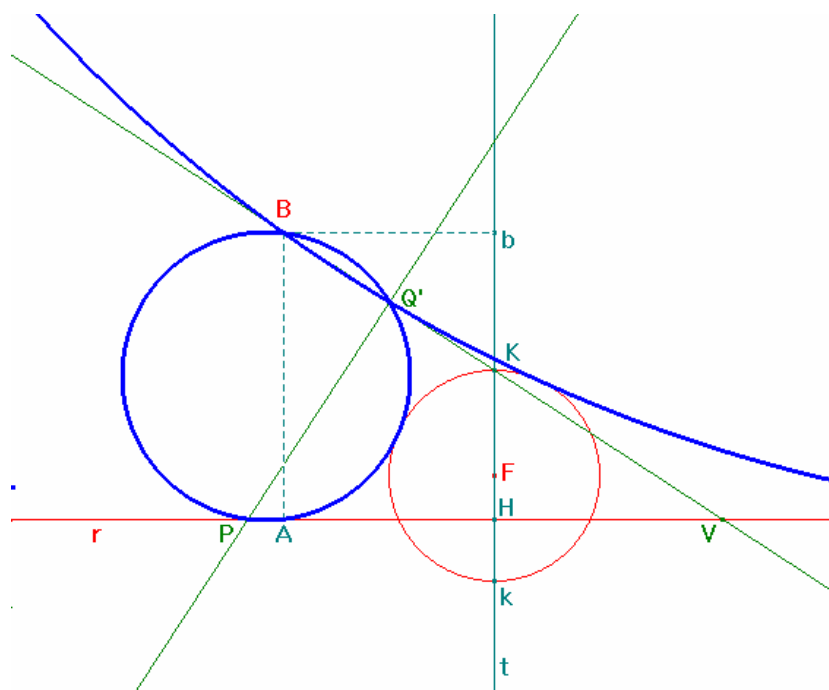


Figura 7

Poiché l'intera costruzione può essere ripetuta scambiando il ruolo dei punti K e k , dopo aver individuato, in modo analogo al precedente, il punto p tale che $AH : Hk = bK : Hp$, ho disegnato il piede q' della perpendicolare condotta da p alla retta Bk , e ho determinato gli altri due cerchi che risolvono il problema applicando la *macro Cerchi per due punti tangenti una retta*, alla retta r e ai punti B e q' (fig. 8).

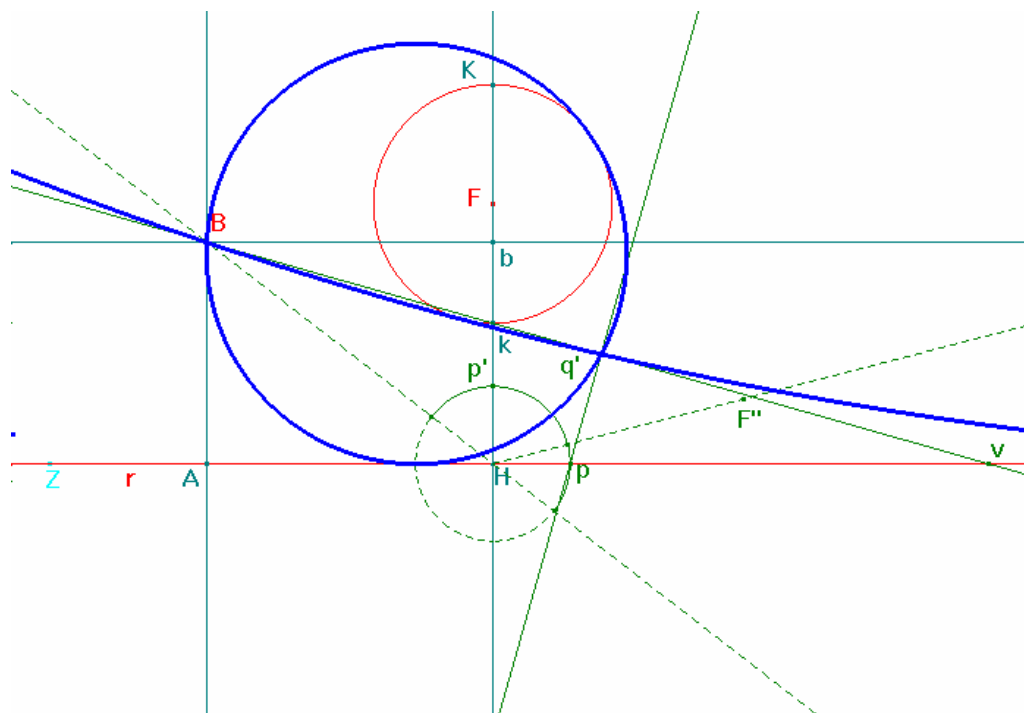


Figura 8

Analizzando la figura costruita al fine di stabilirne il corretto funzionamento, ho tuttavia constatato che essa non è, né corretta, né completa, in quanto in alcune configurazioni dà luogo a cerchi errati, o a nessun cerchio¹¹².

Poiché in tali casi al posto di P e p , dovrebbero essere considerati i loro simmetrici P_1 e p_1 , rispetto al punto H , ho ricostruito la figura relativa al problema in esame, definendo P e P_1 , semplicemente come **punti d'intersezione** della retta r con il **cerchio** di centro H passante per P' , e individuando (dopo aver determinato come in precedenza i punti Q' e Q_1') i cerchi

¹¹² In particolare, se r e \mathcal{C} sono secanti e B è interno a \mathcal{C} , non viene disegnato alcun cerchio.

passanti per B , Q' , tangenti r , e quelli passanti per B , Q_1' , tangenti r , con la *macro Cerchi per due punti tangenti una retta* (fig. 9).

Ripetuta la costruzione per i punti p e p_1 , dal momento che la *macro Cerchi per due punti tangenti una retta* dà luogo in generale a tre cerchi, ho ottenuto una figura in cui al variare della posizione di B , r e \mathcal{C} , compaiono dodici cerchi, pertanto, per far sì che in ogni configurazione vengano visualizzati solo i cerchi che risolvono il problema, ho invalidato la costruzione dei cerchi errati applicando a ciascuno di tali cerchi e al cerchio \mathcal{C} , la *macro Cerchio soltanto se tangente cerchio*¹¹³.

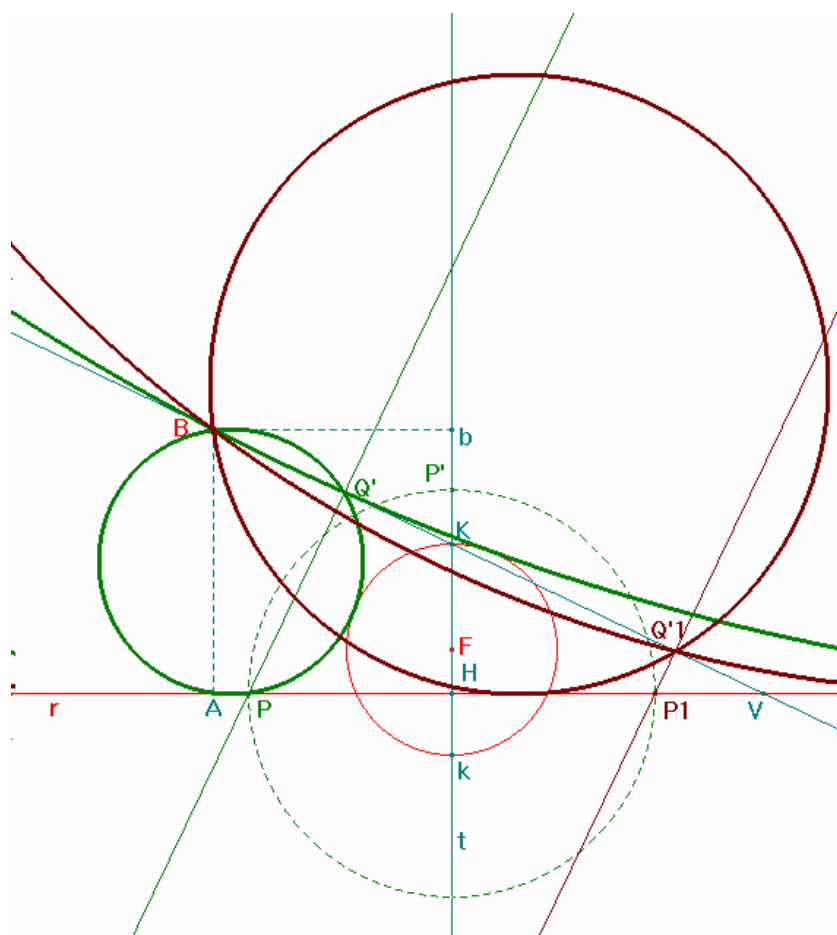


Figura 9

¹¹³ Paragrafo 1.8.

Sebbene la figura ottenuta sia ora corretta, essa non è ancora completa, in quanto se il punto B coincide con il punto K , o con il punto k , non viene disegnato alcun cerchio¹¹⁴.

Per completare la figura ho dunque definito la *macro* **Cerchi passanti per un punto tangenti una retta e un cerchio - I**, evidenziando il punto B , la retta r e il cerchio \mathcal{C} , come oggetti iniziali, e i dodici cerchi che si alternano nel ruolo di soluzioni del problema, come oggetti finali, e ho analizzato separatamente il caso sopraindicato.

Più precisamente, dopo aver disegnato in un nuovo foglio di *CABRI*, una **retta** r , un **cerchio** \mathcal{C} , di centro F (fig. 10), la **retta perpendicolare** t , a r , passante per F , uno dei **punti d'intersezione** B , di \mathcal{C} con r , la **retta perpendicolare** s , a t passante per B , e il **punto d'intersezione** H , di r e t , ho determinato, con la *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta - II**¹¹⁵, il cerchio \mathcal{G} , passante per H e tangente in B la retta s , che è tangente in H alla retta r . E, dal momento che nel caso in cui il punto B non coincide con uno dei punti d'intersezione di \mathcal{C} e t , tale costruzione dà luogo a cerchi errati, ho applicato la *macro* **Cerchio soltanto se tangente retta**¹¹⁶ alla retta r e al cerchio \mathcal{G} .

Nascosto poi il punto C , che appare anche se B non coincide con uno dei punti d'intersezione di \mathcal{C} e t , evidenziando B , r e \mathcal{C} come oggetti iniziali, e l'ultimo cerchio disegnato come oggetto finale, ho definito la *macro* **Cerchi per un punto tangenti una retta e un cerchio - II**, che agisce solo se il punto dato coincide con uno dei punti d'intersezione del cerchio dato con la perpendicolare condotta dal suo centro alla retta data.

¹¹⁴ Ciò è dovuto al fatto che in tal caso, il punto A è sovrapposto al punto H , e il punto B al punto b , pertanto non esiste né il quarto proporzionale di AH , HK e bK , né quello di AH , Hk e bK .

¹¹⁵ È una delle *macro* relative al problema della determinazione del cerchio passante per due punti e tangente una retta (Paragrafo 1.6). In particolare essa dà luogo alle soluzioni del problema solo se il secondo punto evidenziato giace sulla retta, e non dà soluzioni in caso contrario.

¹¹⁶ Paragrafo 1.6.

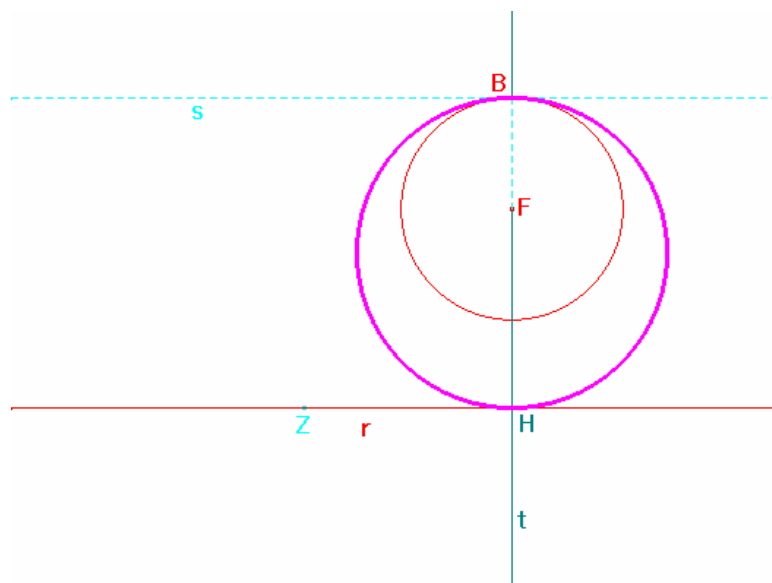


Figura 10

Sebbene a questo punto, disegnati in un nuovo foglio di *CABRI* un punto, una retta e un cerchio, per realizzare un disegno interattivo relativo al problema in esame, sia sufficiente applicare le *macro* **Cerchi per un punto tangenti una retta e un cerchio – I e II**, prima di procedere in tal senso ho analizzato la costruzione relativa alla risoluzione di Viète, in quanto tale problema è uno dei problemi dei *Contatti* per i quali la traduzione in linguaggio inversivo della risoluzione di Viète¹¹⁷ permette di pervenire facilmente alle soluzioni.

Più precisamente, dati un cerchio \mathcal{C} , di centro F , un punto B , e una retta r (fig. 11), e indicato con O , il punto d'intersezione di \mathcal{C} con la retta per F perpendicolare a r , più lontano da r , e con $I_{O,k}$, l'inversione di centro O che trasforma il cerchio dato \mathcal{C} in r , la traduzione in linguaggio inversivo della risoluzione di Viète consiste nel determinare il cerchio cercato come cerchio passante per B e $B' = I_{O,k}(B)$, tangente alla retta r ¹¹⁸. Detto \mathcal{G} tale cerchio, e indicato con Q il punto di contatto di \mathcal{G} con r , si ha infatti che il punto $Q' = I_{O,k}(Q)$

¹¹⁷ *Apollonius Gallus*, Problema VI.

¹¹⁸ *Le ricostruzioni apolloniane in Viète e in Ghetaldi*, p. 89.

appartiene sia al cerchio \mathcal{C} ¹¹⁹, sia al cerchio dato \mathcal{C} , immagine di r mediante $I_{O,k}$. Inoltre, esso è l'unico punto che \mathcal{C} e il cerchio \mathcal{C} hanno in comune, perché se ne avessero un altro, la sua immagine mediante l'inversione considerata sarebbe un ulteriore punto in comune della retta r e del cerchio \mathcal{C} , che è l'immagine di se stesso mediante $I_{O,k}$.

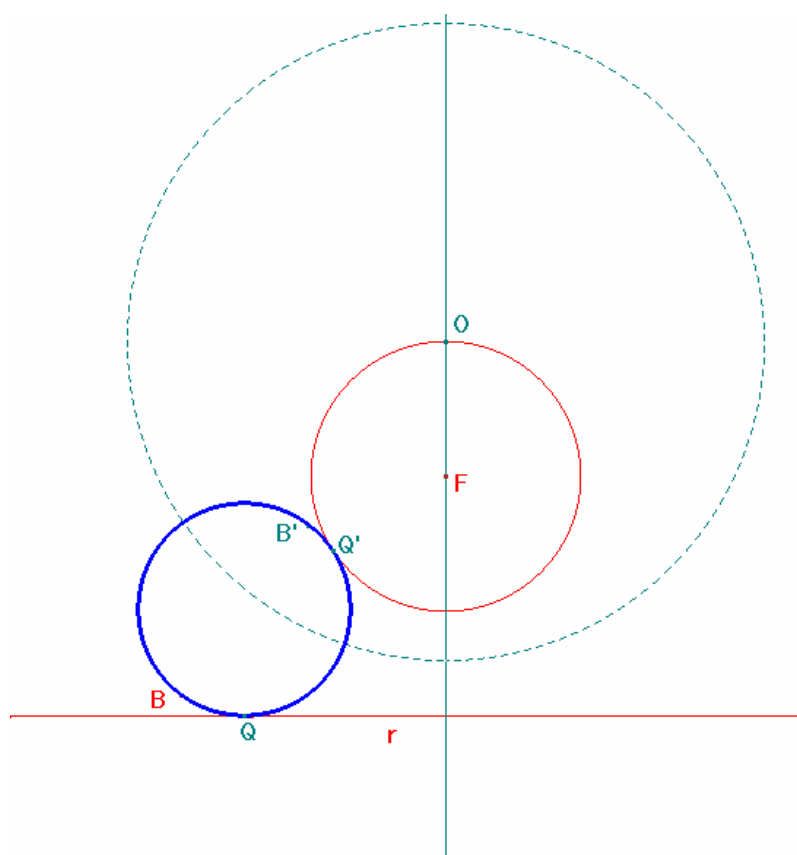


Figura 11

Per eseguire tale costruzione con *CABRI*, dopo aver disegnato un **punto** B , una **retta** r , e un **cerchio** ℓ di centro F (fig. 12), ho disegnato la **retta perpendicolare** t , a r passante per F , il **punto di intersezione** A' , di tale retta con r , la **semiretta** di origine F , passante per il **simmetrico** D , di A' rispetto a F , e il **punto d'intersezione** O , della **semiretta** FD con il cerchio ℓ , che, indipendentemente dalla posizione di tale cerchio rispetto ad r , è il punto d'intersezione della retta t con ℓ , più lontano da r .

¹¹⁹ Perché B , B' e Q non sono allineati, e, per una proprietà caratteristica dell'inversione, due punti qualunque e i loro inversi, se non sono allineati si trovano su una stessa circonferenza.

Disegnato poi il **simmetrico** A , di O rispetto a F , poiché i punti O , A e A' sono allineati, si ha che A' è l'immagine di A rispetto all'inversione di centro O che trasforma ℓ in r , pertanto il raggio della circonferenza d'inversione è dato da $\sqrt{OA \times OA'}$, ossia è medio proporzionale tra OA e OA' . Determinato dunque, con la *macro* **Medio proporzionale**¹²⁰, il segmento OI tale che $OA \times OA' = OI^2 = k^2$, ho disegnato la circonferenza H' , di centro O e raggio OI , che rappresenta la circonferenza d'inversione, e poi determinato $B' = I_{O,k}(B)$, ho costruito con la *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta**, i cerchi passanti per B e B' , tangenti a r .

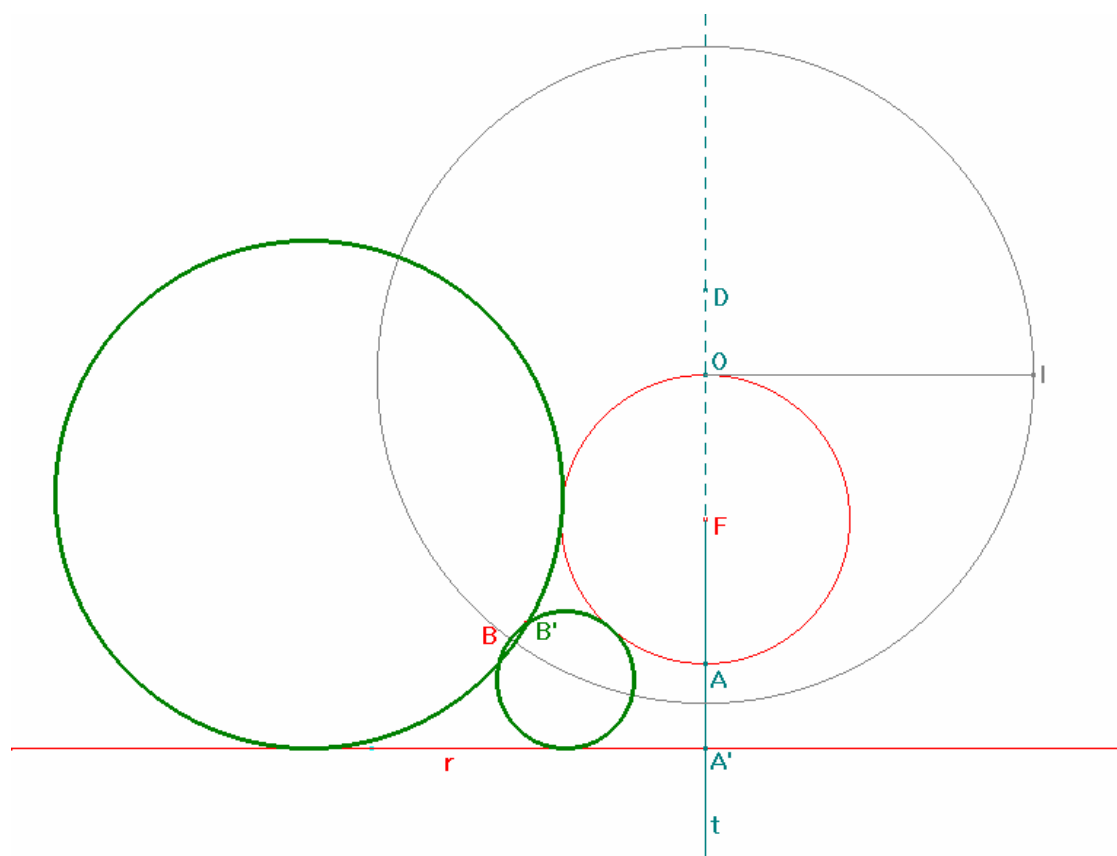


Figura 12

¹²⁰ Paragrafo 1.6

Analizzando la costruzione per verificarne il corretto funzionamento, ho tuttavia constatato che essa non è completa, in quanto, se ℓ e r sono esterni, dei quattro cerchi che risolvono il problema ne vengono disegnati solo due, inoltre, se il cerchio ℓ e la retta r sono secanti, dei cerchi che risolvono il problema vengono disegnati soltanto quelli esterni a ℓ che giacciono nel semipiano di origine r cui appartiene F (fig. 13), e quelli interni a ℓ che giacciono nel semipiano opposto (fig. 14).

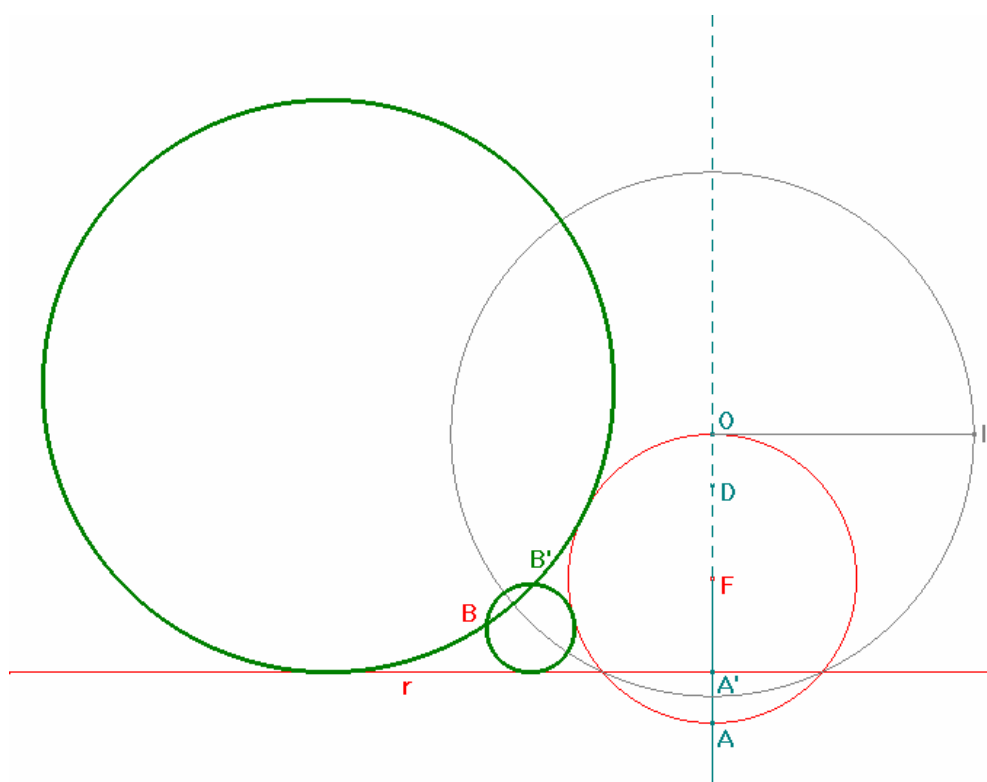


Figura 13

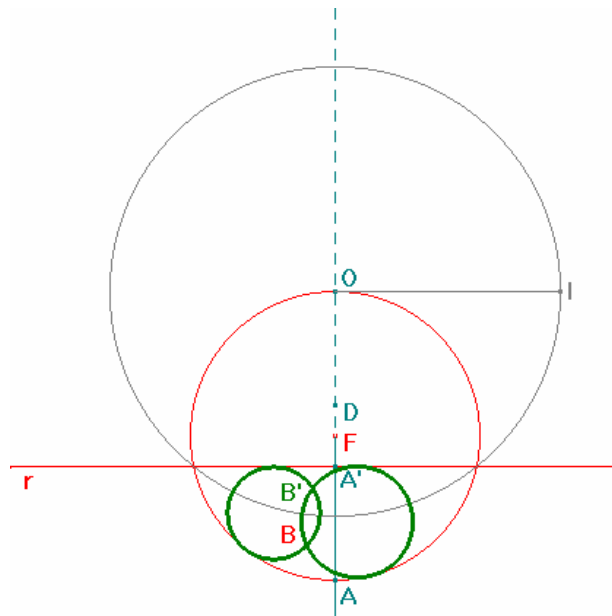


Figura 14

Osservato che per determinare gli ulteriori cerchi che risolvono il problema basta ripetere la costruzione descritta scambiando il ruolo dei punti O e A , ho determinato, con la *macro Medio proporzionale*, il segmento AI' tale che $AA' \times AO = AI'^2 = h^2$ (fig. 15), e, dopo aver disegnato la **circonferenza** H'' , di centro A passante per I' , che rappresenta l'inversione di centro A che trasforma ℓ in r , ho determinato il punto $B'' = I_{A,h}(B)$, e ho costruito, mediante la *macro Cerchi per due punti tangenti una retta*, i cerchi passanti per B e B'' , tangenti a r .

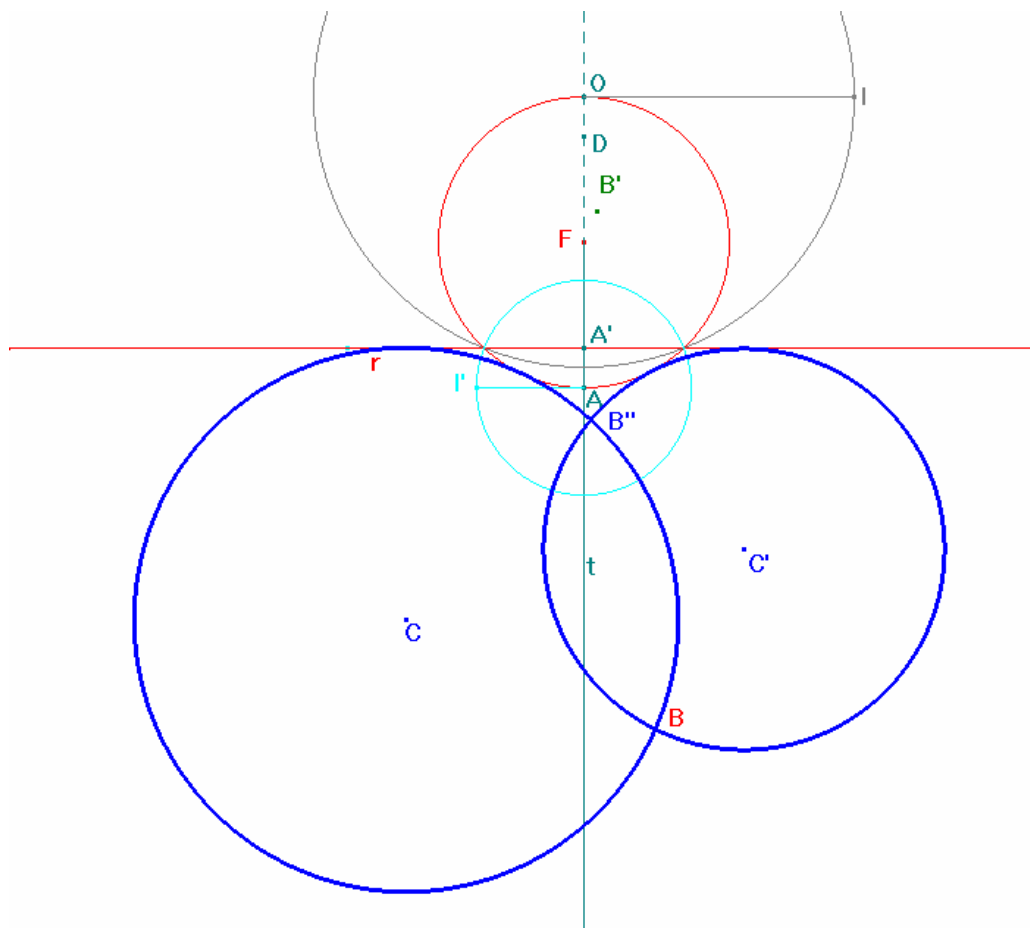


Figura 15

Sebbene questa seconda costruzione, quando il cerchio ℓ e la retta r sono secanti, dà luogo sia ai due cerchi che risolvono il problema che giacciono nel semipiano di origine r cui non appartiene F , sia a quelli interni a ℓ che giacciono nel semipiano opposto (fig. 16), essa dà luogo a due cerchi errati nel caso in cui ℓ e r sono esterni (fig. 17), in quanto, in realtà l'inversione $I_{A,h}$ trasforma r in ℓ , solo se essi sono secanti, mentre trasforma r nel simmetrico di ℓ rispetto al punto A , se essi sono esterni.

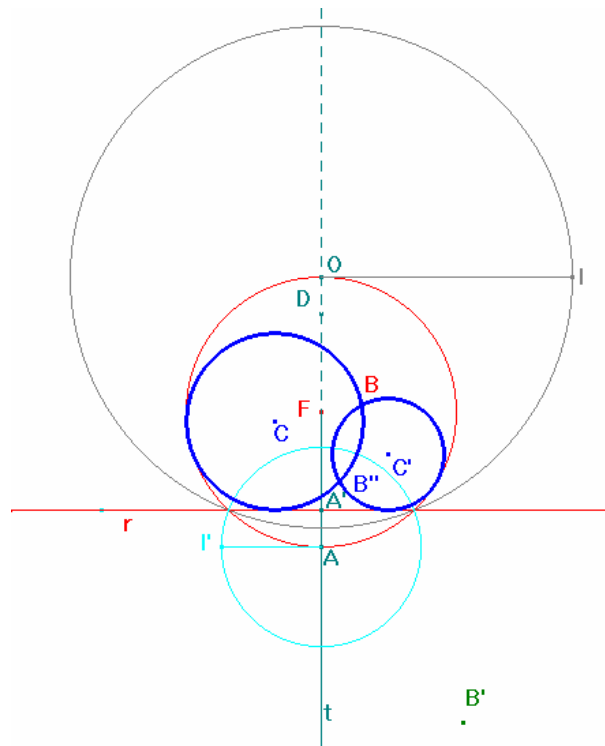


Figura 16

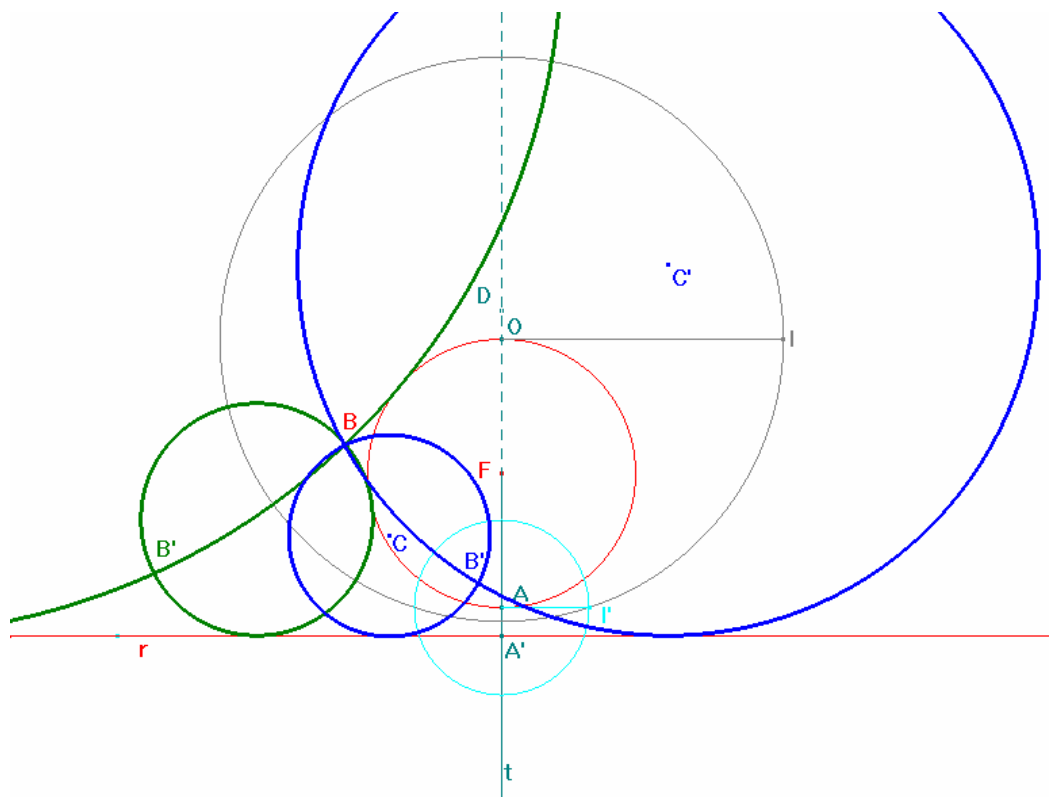
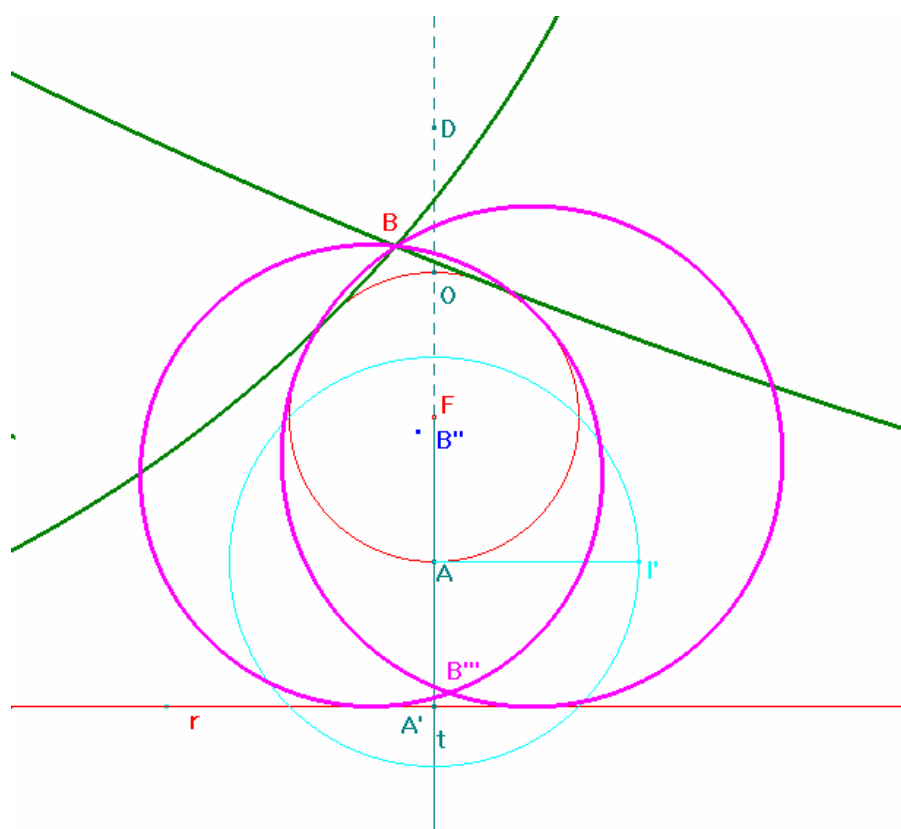


Figura 17

soltanto se tangente cerchio ¹²¹.

**Figura 18**

¹²¹ Poiché la *macro Cerchi per due punti tangenti una retta* dà luogo a tre cerchi (dei quali uno appare soltanto se la retta data è parallela alla retta passante per i due punti dati), nella figura costruita ho applicato la *macro Cerchio soltanto se tangente a cerchio* anche ai cerchi che compaiono nel caso in cui B appartiene alla retta perpendicolare a t , passante per A' .

Analizzando la figura così ottenuta, ho appurato che essa è corretta ma non ancora completa, in quanto, sia se il cerchio \mathcal{C} e la retta r sono tangenti, sia se il centro F di ℓ appartiene a r , non viene disegnato alcun cerchio.

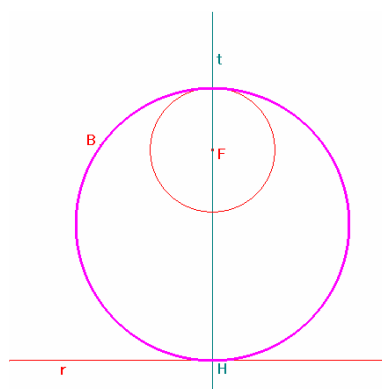
Per determinare i cerchi che risolvono il problema in tali configurazioni, dopo aver definito la *macro* **Cerchi per un punto tangenti una retta e un cerchio – I (Viète)**, evidenziando B , r e \mathcal{C} come oggetti iniziali, e i nove cerchi ottenuti come oggetti finali¹²², ho analizzato ciascun caso separatamente. In particolare, per costruire i cerchi corrispondenti al caso in cui il cerchio e la retta sono tangenti, ho disegnato in un nuovo foglio di *CABRI* un **punto** B , un **punto** F (fig. 19), una **retta** r , la **retta perpendicolare** t , a r passante per F , il **punto d'intersezione** H , di t e r , e il **cerchio** \mathcal{C} di centro F passante per H . E poi, con la *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta - II**¹²³, ho disegnato il cerchio \mathcal{G} , passante per B e tangente in H alla retta r , che risolve il problema in quanto è tangente in H al cerchio \mathcal{C} .

Poiché il punto H esiste sempre, il cerchio \mathcal{G} appare anche se non soddisfa le condizioni del problema. Sebbene ciò possa essere evitato applicando a tale cerchio e al cerchio \mathcal{C} , la *macro* **Cerchio soltanto se tangente cerchio**, in tal modo il cerchio finale apparirebbe anche se r e \mathcal{C} non sono tangenti, con la conseguenza che nella figura conclusiva relativa al problema in esame, esso sarebbe sovrapposto a uno dei cerchi già disegnati¹²⁴.

¹²² Tre cerchi relativi a B , B' e r , tre relativi a B , B'' e r , e tre relativi a B , B''' e r .

¹²³ Nota 115.

¹²⁴ Lo scopo di tale costruzione è quello di creare una *macro* relativa al caso particolare del problema in esame, in cui il cerchio e la retta dati sono tangenti. Poiché per ottenere una figura generale, tale *macro* verrà applicata insieme alle altre, a un punto una retta e un cerchio qualsiasi, in tal modo essa darebbe luogo a una soluzione del problema sia nel caso in cui la retta e il cerchio iniziali sono tangenti, sia quando il punto di contatto di uno dei cerchi soluzione con r , coincide con il punto H .



Per eliminare ogni ambiguità, dopo aver applicato a r e \mathcal{C} , la *macro* **Cerchio e retta tangenti?**¹²⁵, ho **misurato** la distanza del centro C ¹²⁶ di \mathcal{C} , dalla circonferenza di tale cerchio, e ne ho calcolato il prodotto con l'esito della *macro*. **Trasportato** il risultato ottenuto sul punto C , e individuato così un punto Q che appare solo se \mathcal{C} e r sono tangenti, ho poi disegnato il **cerchio** di centro C passante per Q , che appare solo se soddisfa le condizioni del problema, pertanto, evidenziando B , r e \mathcal{C} come oggetti iniziali, e, dopo aver nascosto C e Q , l'ultimo cerchio disegnato come oggetto finale, ho definito la *macro* **Cerchi per un punto tangenti una retta e un cerchio - II(Viéte)**, che dà un esito solo nel caso particolare in cui il cerchio e la retta sono tangenti.

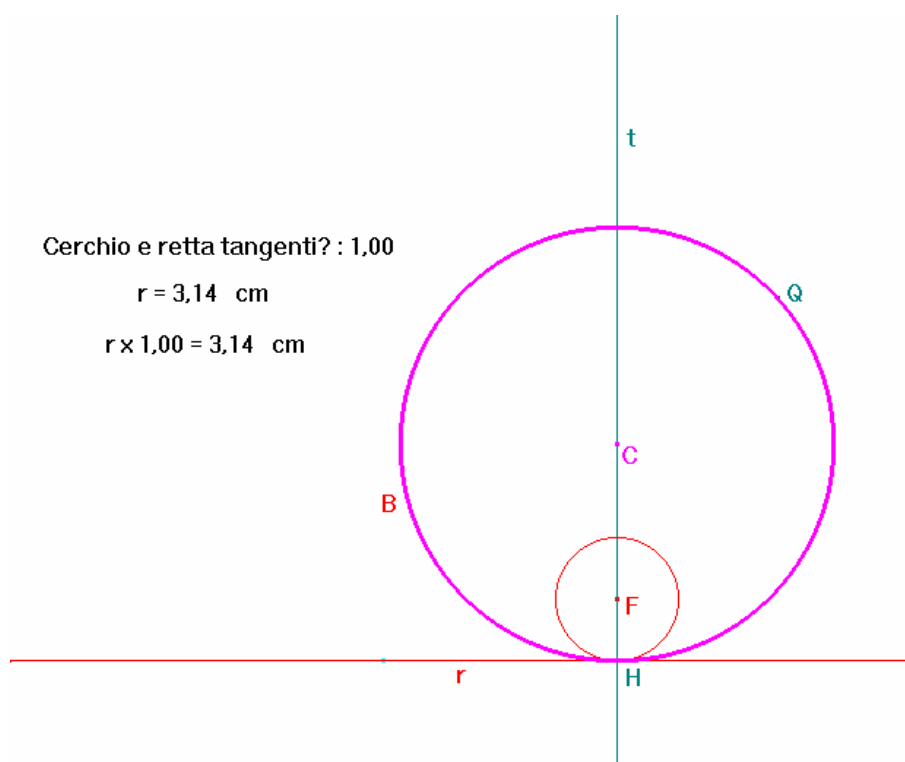


Figura 19

Per quanto riguarda il caso in cui il centro del cerchio dato appartiene alla retta data, dopo aver disegnato in un nuovo foglio di *CABRI* un **punto** B , un **cerchio** \mathcal{C} , di centro F , e una

¹²⁵ Paragrafo 1.6.

¹²⁶ Il punto C è nascosto perché la *macro* che genera \mathcal{C} è stata definita dopo aver nascosto il centro del suo oggetto finale.

retta r , passante per F (fig. 20), ho disegnato i **punti d'intersezione** O e A , di \mathcal{C} con la **retta perpendicolare** t , a r , passante per F , e ho determinato, con la *macro Medio proporzionale*, il segmento OI tale che $OA \times OF = AO \times AF = OI^2 = k^2$. Disegnata la **circonferenza** di centro O passante per I , e la sua **simmetrica** rispetto a r , che rappresentano le circonferenze d'inversione, ho poi determinato $B' = I_{O,k}(B)$ e $B'' = I_{A,k}(B)$, e, con la *macro Cerchi per due punti tangenti una retta*, ho costruito i cerchi passanti per B e B' , tangenti a r , e i cerchi passanti per B e B'' , tangenti a r .

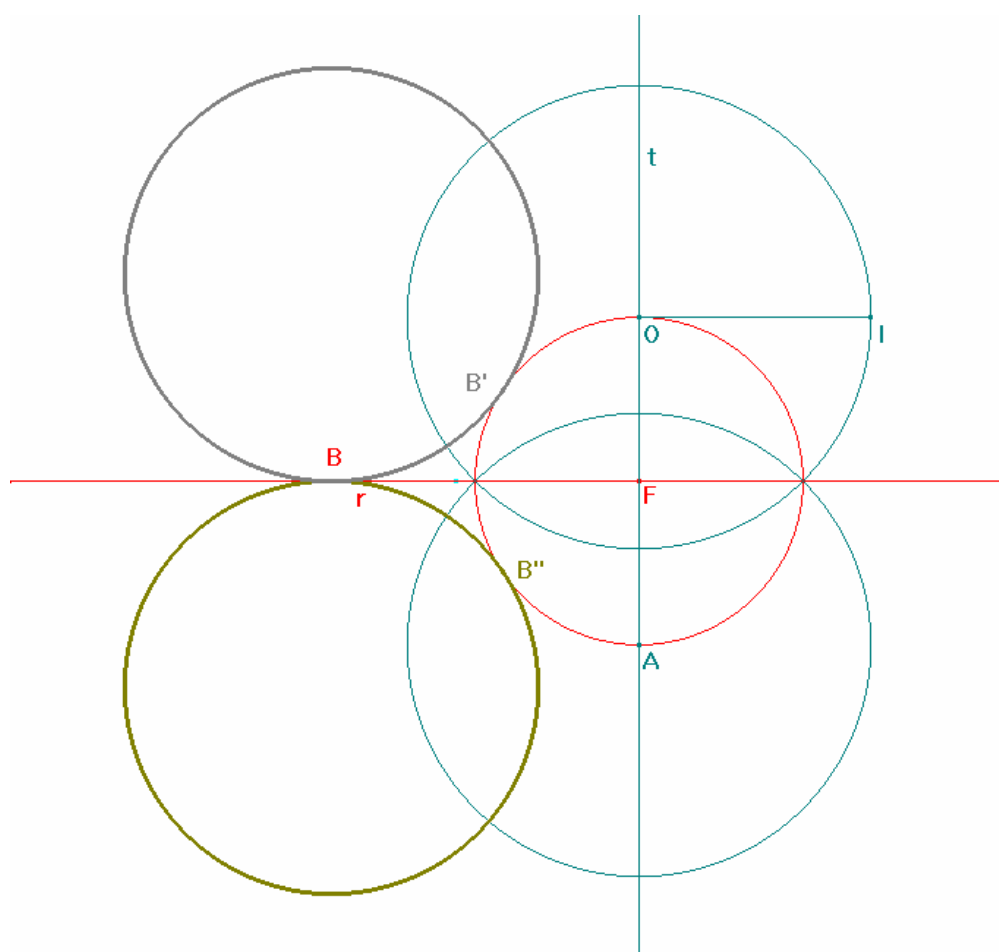


Figura 20

Poiché se F non giace su r la figura costruita dà luogo a cerchi errati, occorre applicare a ciascuno dei sei cerchi ottenuti la *macro Cerchio soltanto se tangente cerchio*. Sebbene in tal modo si riesca ad ovviare a tale inconveniente, ho preferito invalidare l'intera

costruzione nel caso in cui F non giace su r , al fine di rendere più semplice l'algoritmo che si cela dietro la costruzione della figura. E, a tale scopo, ho definito la *macro* **Il punto appartiene alla retta?**, che, evidenziati un punto e una retta, fa apparire un numero uguale a 1 se la risposta è affermativa, e un numero inesistente in caso contrario. Più precisamente, dopo aver disegnato in un nuovo foglio di *CABRI*, un **punto** P e una **retta** r (fig. 21), ho **misurato** la loro distanza d , ho **calcolato** la quantità $\frac{\ln(10^{-5} - d)}{\ln(10^{-5} - d)} = \begin{cases} 1 & \text{se } P \in r \\ \text{inesistente} & \text{se } P \notin r \end{cases}$, e ho poi definito la suddetta *macro* evidenziando P e r , come oggetti iniziali e il numero calcolato come oggetto finale.

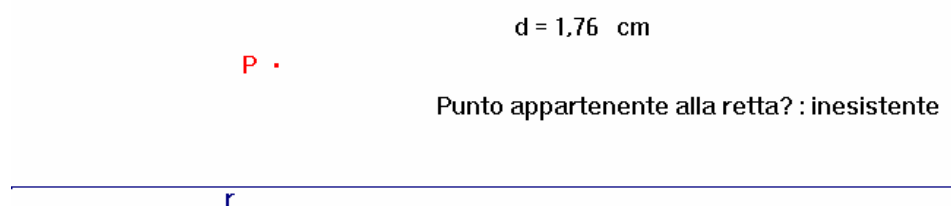


Figura 21

Applicata tale *macro* al punto F e alla retta r , nella figura relativa al caso in cui il centro del cerchio dato giace sulla retta data (fig. 22), ho **misurato** il raggio di \mathcal{C} , come distanza del suo centro F dalla sua circonferenza, e ne ho calcolato il prodotto con l'esito della *macro*. **Trasportato** poi il risultato su F , ho individuato un punto Y , e quindi il **cerchio** \mathcal{C}' , di centro F passante per Y , che esiste solo se F giace su r . Fatto ciò, ho **ridefinito** il punto O , come punto d'intersezione di \mathcal{C}' e t , e in tal modo ho ottenuto una costruzione corretta, che appare solo se F giace su r . Evidenziando B , r e \mathcal{C} , come oggetti iniziali, e i sei cerchi disegnati come oggetti finali, ho allora definito la *macro* **Cerchi per un punto tangenti una retta e un cerchio - III(Viéte)**, che è relativa al caso particolare in cui il centro del cerchio giace sulla retta.

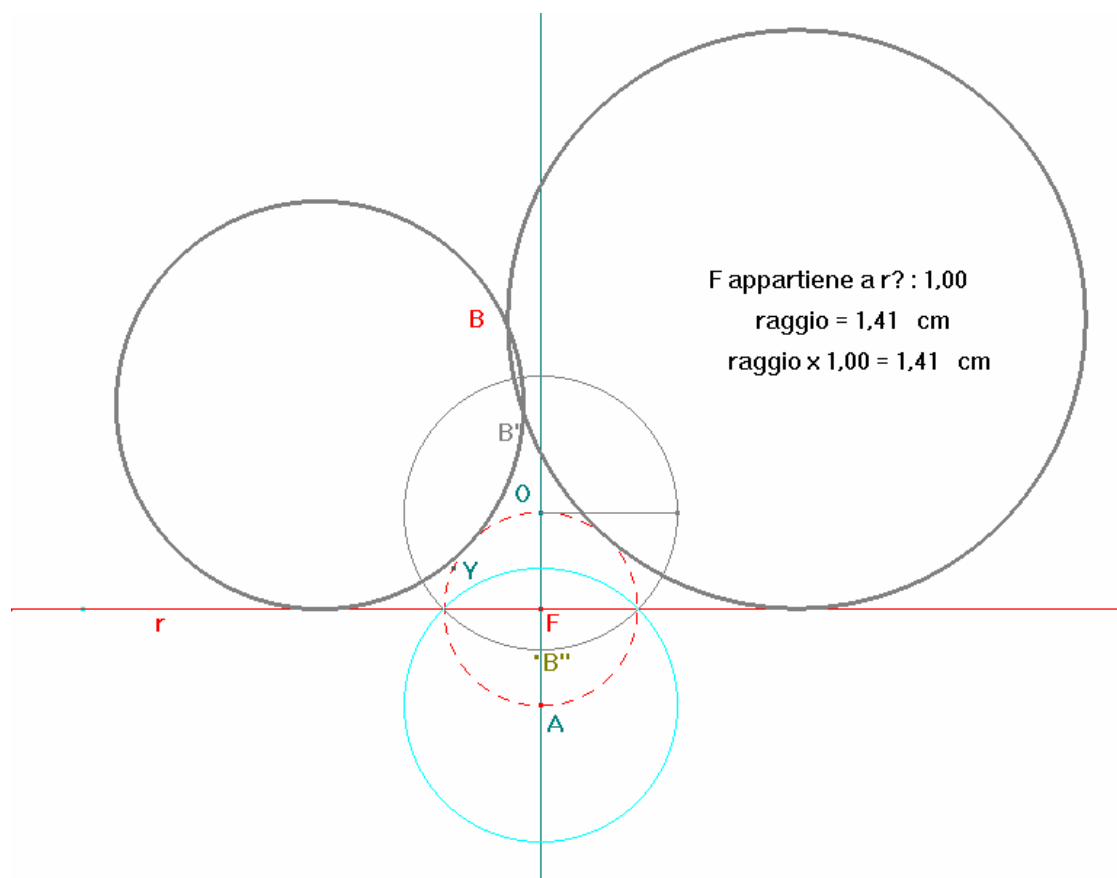


Figura 22

L'applicazione simultanea delle *macro* **Cerchi per un punto tangenti una retta e un cerchio – I, II e III(Viéte)**, permette di ottenere una figura interattiva completa e corretta in cui i cerchi che si scambiano il ruolo di soluzioni del problema sono sedici. Tuttavia, con un semplice espediente, è possibile ridurre a sei il numero di oggetti finali della *macro* **I(Viéte)**, e quindi a tredici quello della figura completa.

Più precisamente, poiché i punti B'' e B''' sono simmetrici rispetto al punto A , e i cerchi costruiti con essi non appaiono mai contemporaneamente, bensì quelli relativi a B'' , appaiono solo se ℓ e r sono secanti, e quelli relativi a B''' , solo se ℓ e r sono esterni, è possibile costruire un punto H che coincide con B'' nel primo caso, e con B''' nel secondo. A tale scopo, nella figura in cui è stata definita la *macro* **I(Viéte)**, ho disegnato il **cerchio** di centro A passante per B'' (fig. 23), uno dei **punti d'intersezione** Y , di tale cerchio con la **retta perpendicolare** al **segmento** $B''B'''$, passante per A , e il **sistema di assi** $AB'''Y$. Successivamente ho determinato le **distanze** FA' e d , di F rispettivamente dalla retta r e

Pertanto, evidenziando B , r e \mathcal{C} , come oggetti iniziali, e i sei cerchi ottenuti come oggetti finali¹²⁸, ho ridefinito la *macro* **Cerchi per un punto tangenti una retta e un cerchio - I(Viète)**.

Sebbene l'applicazione simultanea delle *macro* **Cerchi per un punto tangenti una retta e un cerchio – I, II, III (Viète)**, dia luogo a una figura in cui il numero di cerchi che si scambiano il ruolo di soluzioni del problema è uguale a quello dei cerchi cui dà luogo l'applicazione simultanea delle *macro* **Cerchi per un punto tangenti una retta e un cerchio – I, II, III**, dopo aver disegnato in un nuovo foglio di *CABRI*, un punto B , una retta r e un cerchio \mathcal{C} , ho scelto di realizzare il disegno interattivo relativo al problema in esame applicando ad essi le *macro* definite eseguendo la costruzione relativa alla risoluzione di Viète, in quanto, dal momento che la *macro* **Cerchio soltanto se tangente cerchio**, non è stata applicata a tutti gli oggetti finali, l'algoritmo che si cela dietro tale costruzione è più semplice¹²⁹.

Inoltre, poiché con lo spostamento manuale del punto B sulla circonferenza di \mathcal{C} , o sulla tangente a \mathcal{C} parallela alla retta r , o ancora, di \mathcal{C} e di r al fine di renderli tangenti, non si produce l'effetto desiderato, e non si possono dunque visualizzare i cerchi che in tali casi risolvono il problema, ho deciso di illustrare il problema in esame mediante più figure interattive distinte, in cui ho inserito una casella di testo per indicare quali sono gli oggetti mobili, e come possono essere spostati.

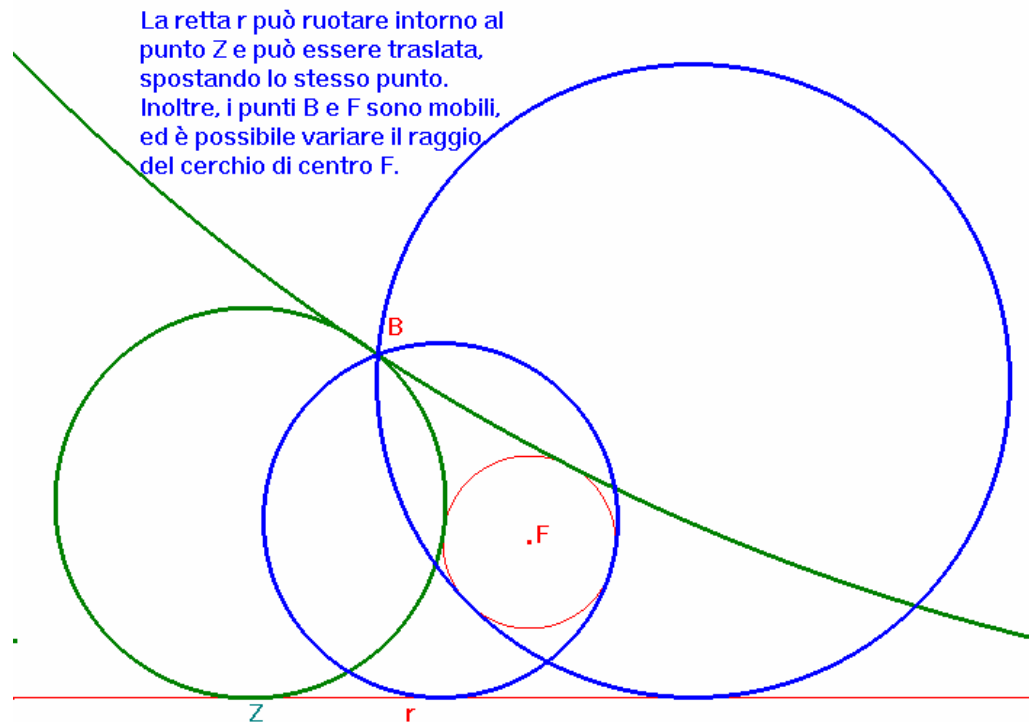
In particolare, la prima è la più generale, e in essa compaiono quattro soluzioni se il cerchio e la retta dati sono esterni, e due se sono secanti, eccetto, come è giusto che sia, nel caso in cui il problema non ammette soluzioni o ne ammette infinite (fig. 24).

La seconda è relativa al caso in cui il punto B giace sulla circonferenza di \mathcal{C} , e in essa appaiono due coppie di soluzioni coincidenti, che si riducono a due coincidenti se B appartiene alla perpendicolare a r condotta dal centro F di \mathcal{C} (fig. 25).

¹²⁸ Tre cerchi relativi a B , B' e r , e tre relativi a B , H e r .

¹²⁹ Poiché le *macro* sono state definite dopo aver nascosto i centri dei cerchi finali, i centri dei cerchi che soddisfano le condizioni del problema non compaiono nel disegno interattivo. Malgrado per ovviare a tale inconveniente sia sufficiente ricostruirli, come punti d'intersezione degli assi di due corde fissate su ogni singolo cerchio, non ho potuto eseguire tali costruzioni, in quanto, l'elevato numero di cerchi soluzione rende troppo complesso l'algoritmo che si cela dietro la figura.

La quinta è relativa al caso in cui r e \mathcal{C} sono tangenti e B giace sulla circonferenza di \mathcal{C} , e in essa compaiono tre soluzioni, di cui due coincidenti tra loro e una coincidente con \mathcal{C} , che si riducono a una se B appartiene alla perpendicolare a r condotta da F (fig. 28).

**Figura 24**

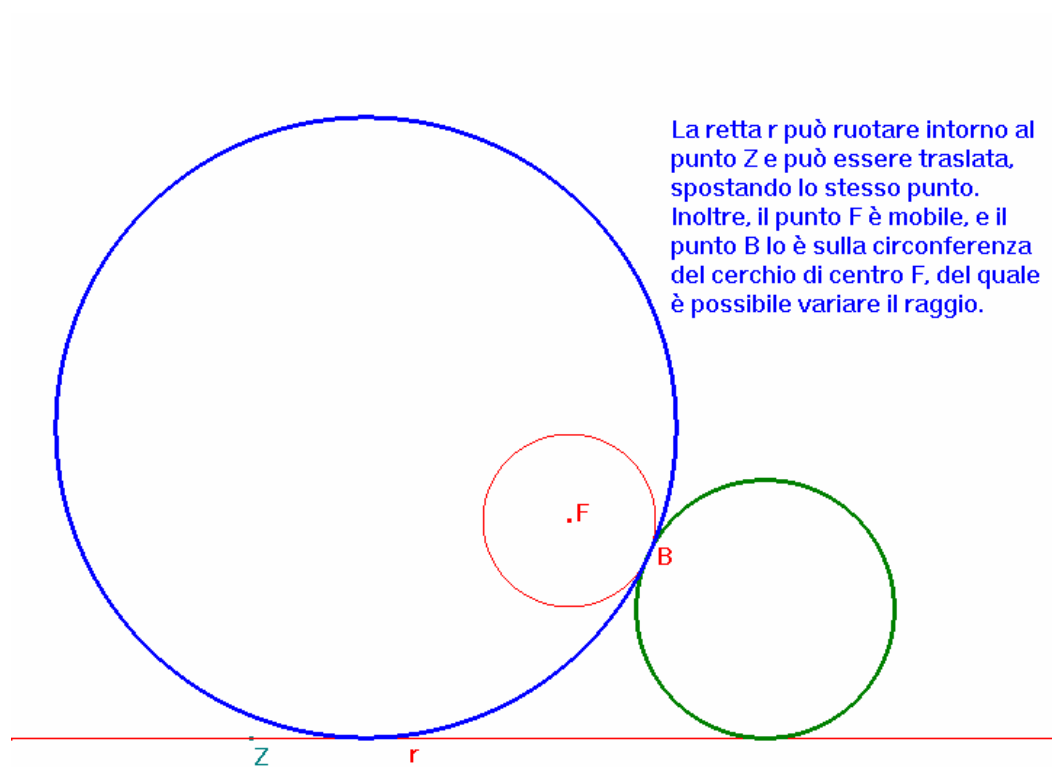


Figura 25

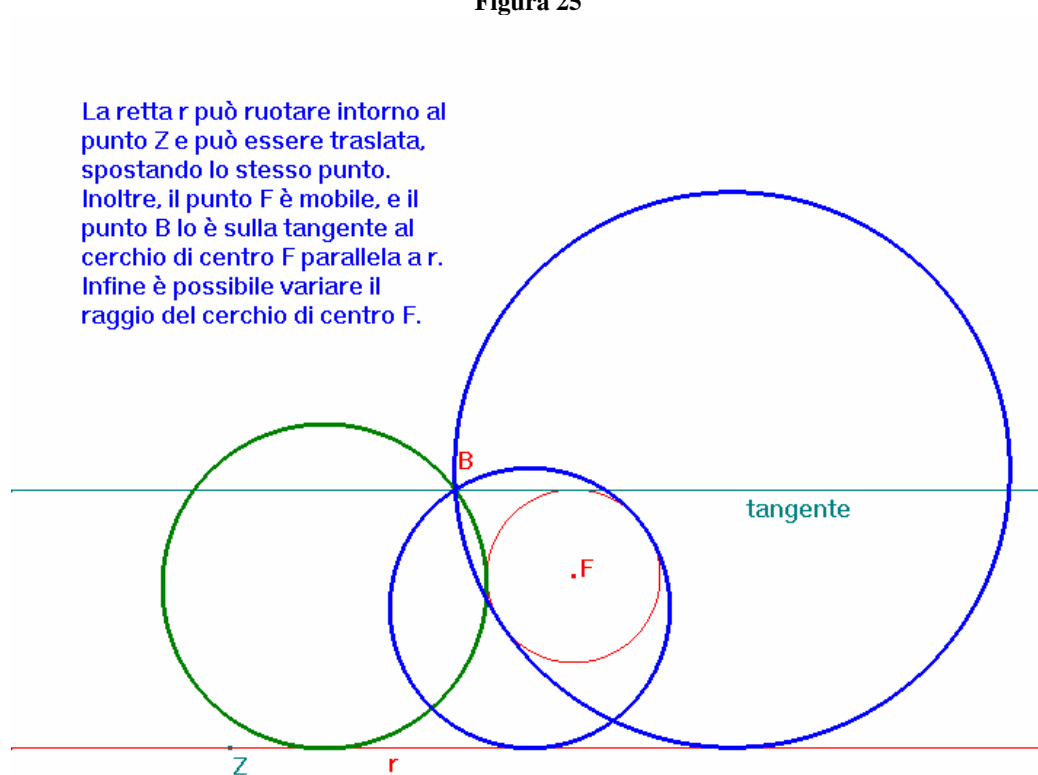


Figura 26

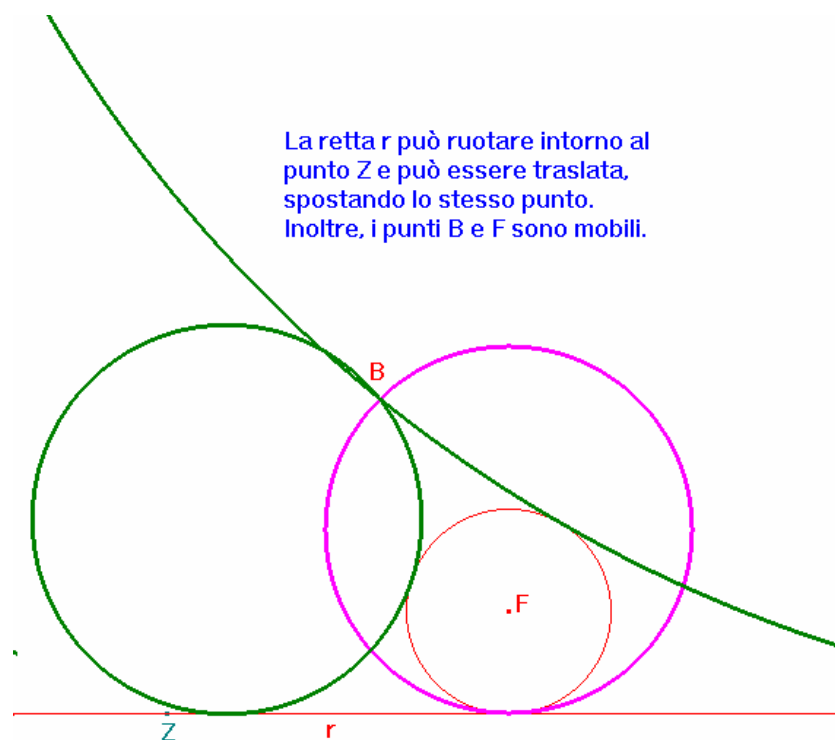


Figura 27

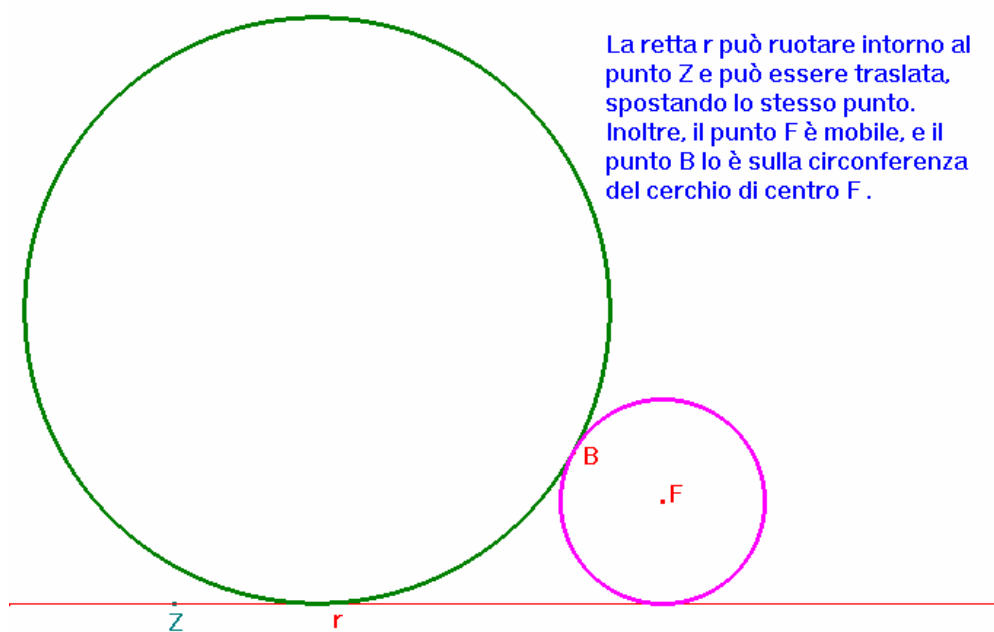


Figura 28

E infine la sesta, è relativa al caso in cui r e \mathcal{C} sono tangenti e B giace sulla tangente a \mathcal{C} parallela a r , e in essa compaiono al più due soluzioni, che si riducono a una se il punto B appartiene alla perpendicolare alla retta data condotta dal centro del cerchio dato (fig. 29).

La retta r può ruotare intorno al punto Z e può essere traslata, spostando lo stesso punto. Inoltre, il punto F è mobile, e il punto B lo è sulla tangente al cerchio di centro F , parallela a r .

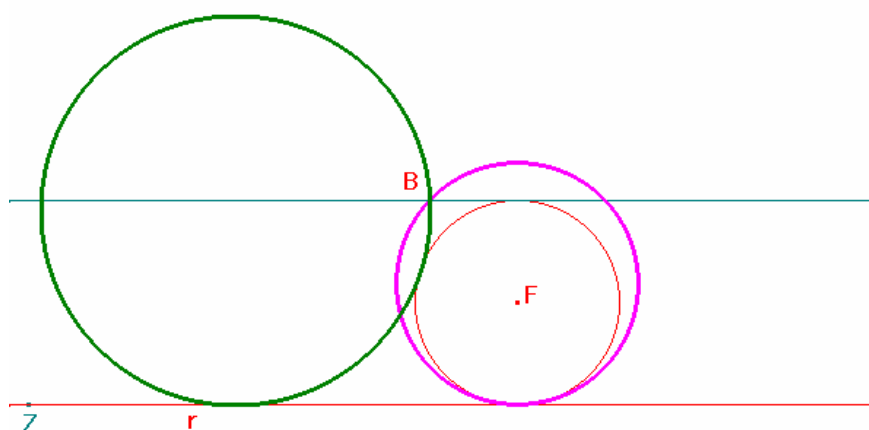


Figura 29

Poiché alla fine della risoluzione del problema esaminato, Newton mostra come sia possibile ricondurre ad esso il problema relativo a due cerchi e una retta, mediante semplici considerazioni sulle distanze tra i centri dei cerchi dati, ho definito la *macro* **Cerchi per un punto tangenti una retta e un cerchio**, evidenziando nella figura interattiva relativa al caso generale, il punto B , la retta r e il cerchio \mathcal{C} , come oggetti iniziali, e i tredici cerchi soluzione, come oggetti finali, al fine di realizzare una figura interattiva che illustra il nuovo problema.

In particolare, dati la retta PQ , il cerchio RT di centro B , e il cerchio SV di centro F (fig. 30), Newton disegna il cerchio EM , di centro F e raggio $FS - BR$, la retta AH , parallela a PQ e tale che $PA = BR$, il cerchio di centro C , che passa per il punto B ed è tangente sia alla retta AH , sia al cerchio EM , e il punto d'intersezione R del segmento BC con il cerchio RT ,

concludendo la sua risoluzione con l'individuazione del cerchio RS , di centro C e raggio CR , che è tangente alla retta PQ e ai cerchi RT e SV ¹³⁰.

In realtà, tale riduzione del problema in esame al problema precedente è dovuta a Viète¹³¹, che distingue, oltre al caso trattato da Newton, ovvero quello in cui il cerchio cercato è tangente esternamente a entrambi i cerchi dati (fig. 31), anche il caso in cui il cerchio cercato è tangente internamente a entrambi i cerchi dati (fig. 32), e il caso in cui il cerchio cercato è tangente esternamente a uno di essi ed internamente all'altro, in cui occorre considerare il cerchio concentrico a uno di essi avente raggio uguale alla somma dei loro raggi¹³² (fig. 33).

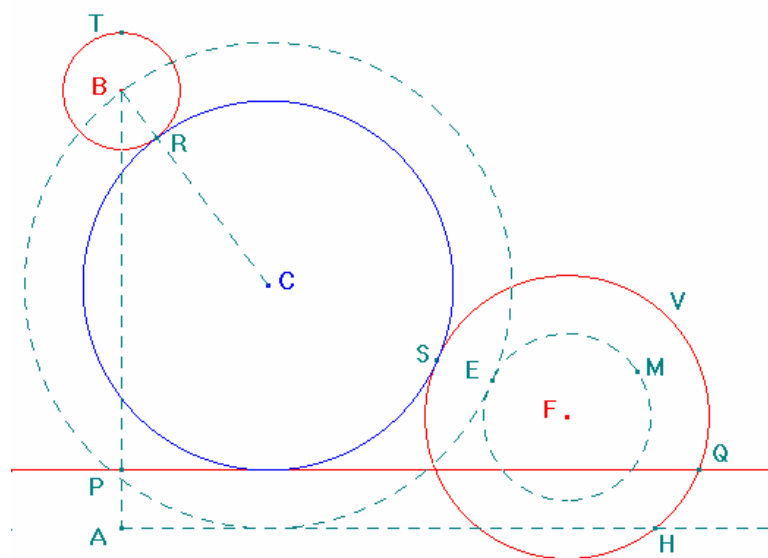


Figura 30

¹³⁰ Paragrafo 5.20, nota 273.

¹³¹ *Apollonius Gallus*, Problema VII.

¹³² Il fatto che Newton non abbia proposto la completa risoluzione del problema nell'*Arithmetica Universalis*, rende evidente ancora una volta che egli non era interessato a determinare tutte le soluzioni di ogni problema, ma solo alcune di esse.

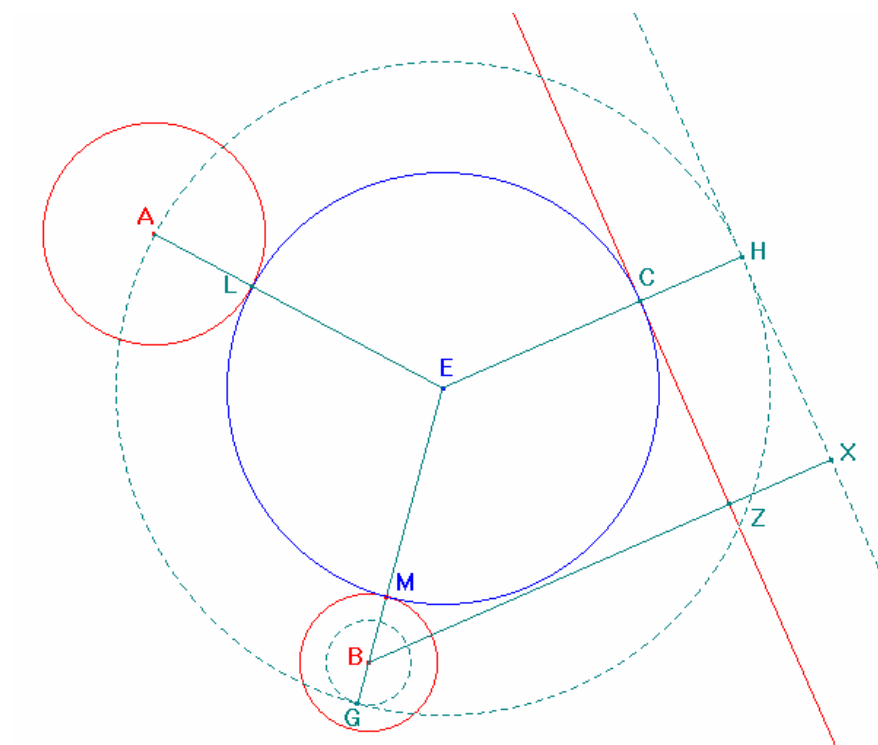


Figura 31

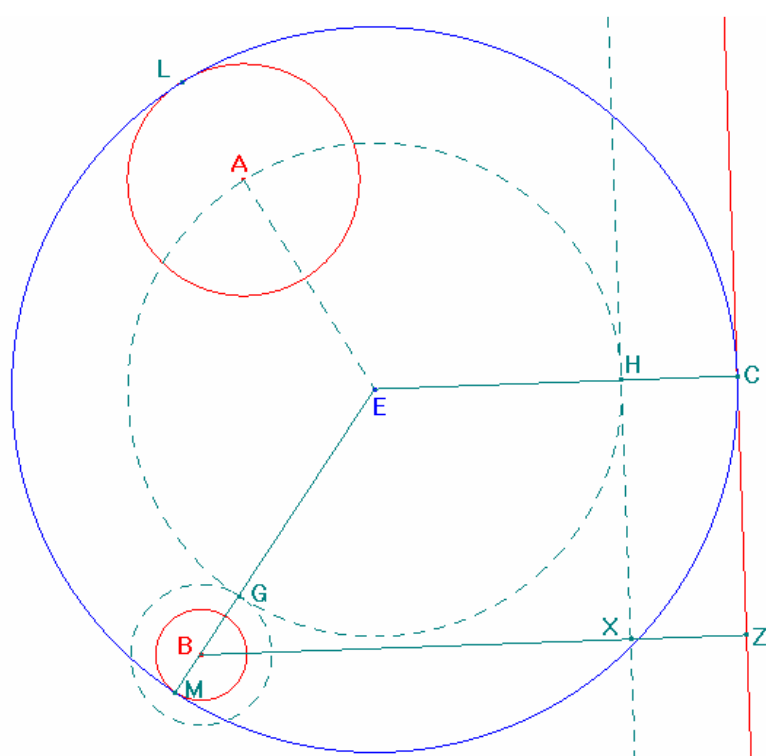


Figura 32

maggiore, come nella figura che correda la risoluzione di Newton (fig. 30), ho determinato per ognuno dei cerchi ottenuti che sono tangenti esternamente a \mathcal{C} , la **semiretta** avente origine nel centro B di \mathcal{C}' , passante per il loro centro C ¹³³ (fig. 35), e il **cerchio** concentrico passante per il **punto d'intersezione** P , di tale semiretta con \mathcal{C} ¹³⁴.

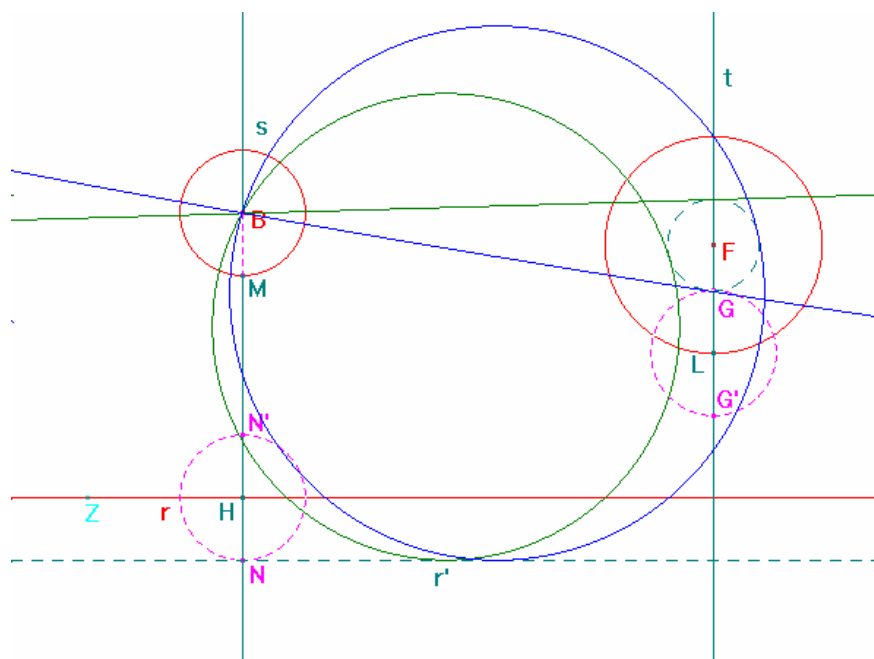
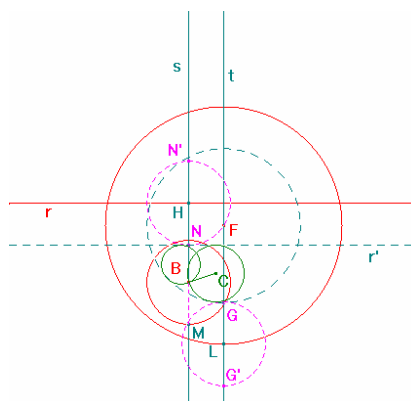


Figura 34

¹³³ I centri dei cerchi ottenuti mediante la *macro Cerchi per un punto tangenti una retta e un cerchio*, sebbene non compaiano, in quanto sono stati nascosti prima della definizione della *macro*, possono essere visualizzati mediante il comando *Mostra/Nascondi*.

¹³⁴ Considerando il segmento BC , come nella costruzione indicata da Newton, se i centri dei cerchi passanti per B e tangenti \mathcal{C} e r' , sono interni a \mathcal{C}' , il punto P corrispondente non esiste, e dunque non viene determinata alcuna soluzione.



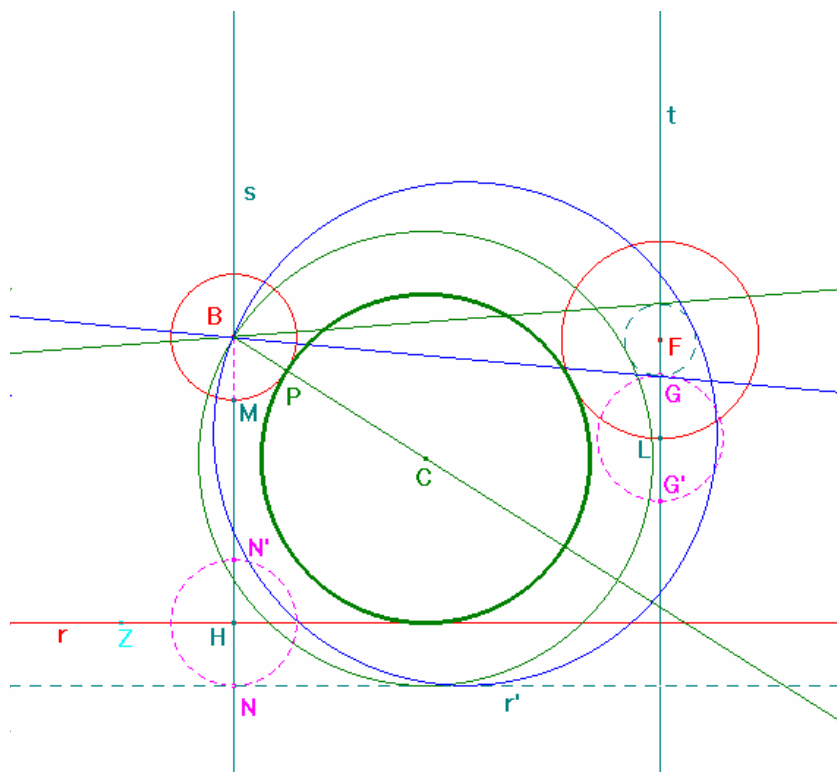


Figura 35

I cerchi passanti per B e tangenti \mathcal{C} e r' , che sono tangenti internamente a \mathcal{C} , nella configurazione considerata non danno luogo ad alcuna soluzione del problema, tuttavia, nel caso in cui il cerchio \mathcal{C} è il cerchio di raggio minore, come nella prima delle figure che corredano la risoluzione di Viète (fig. 31), eseguendo su di essi la costruzione precedentemente descritta si ottengono dei cerchi che soddisfano le condizioni del problema (fig. 36), mentre i cerchi passanti per B e tangenti \mathcal{C} e r' , che sono tangenti esternamente a \mathcal{C} , danno luogo a cerchi errati.

Inoltre, nel caso in cui \mathcal{C} , \mathcal{C}' e r' giacciono nello stesso semipiano di origine r , come nella seconda delle figure che corredano la risoluzione di Viète (fig. 32), i cerchi soluzione, se il raggio di \mathcal{C} è minore di quello di \mathcal{C} (fig. 37), si ottengono mediante i cerchi passanti per B e tangenti r' e \mathcal{C} , che sono sempre tangenti esternamente a \mathcal{C} , considerando al posto di P , il suo simmetrico P' rispetto al punto B , invece se il raggio di \mathcal{C} è maggiore di quello di \mathcal{C} (fig.

38), si ottengono mediante i cerchi passanti per B e tangenti r' e G , che sono tangenti esternamente a G , solo se r' e G sono secanti, considerando il simmetrico P' , di P ¹³⁵.

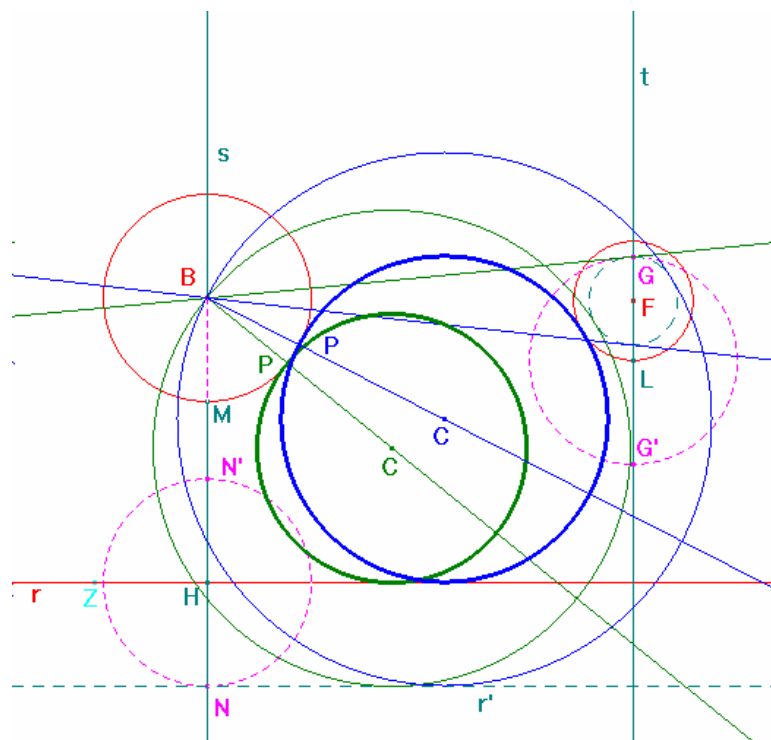


Figura 36

¹³⁵ Alcuni cerchi sono tangenti a G , internamente o esternamente, a seconda che G e r' siano esterni o secanti, in quanto la *macro I – Viète* relativa al problema precedente, è stata definita unificando il caso secante con il caso esterno.

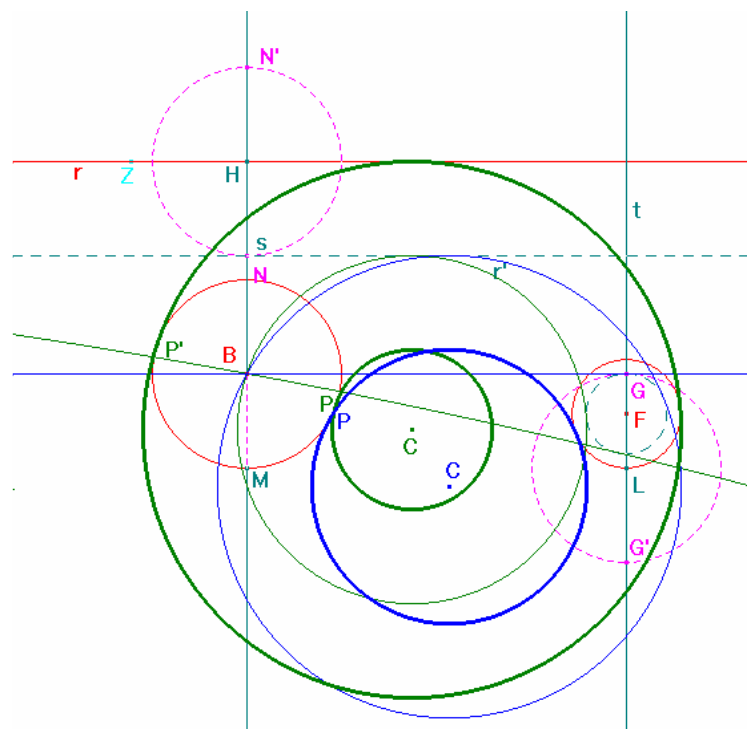


Figura 37

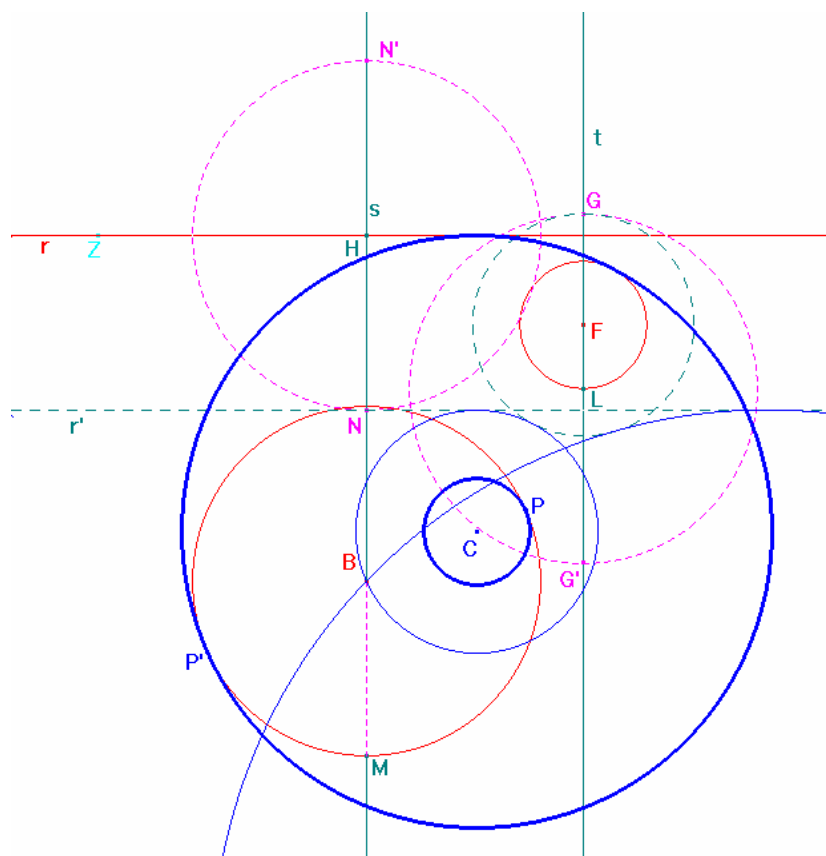


Figura 38

Dal momento che nella figura interattiva relativa al problema in considerazione sarà possibile cambiare il raggio dei cerchi iniziali, per individuare tutti i cerchi che soddisfano le condizioni richieste, ho eseguito la costruzione che dà luogo ai cerchi soluzione¹³⁶ in tutti i cerchi ottenuti con la *macro* **Cerchi per un punto tangenti una retta e un cerchio**, eliminando i cerchi errati con l'ausilio delle *macro* **Cerchio soltanto se tangente retta**, e **Cerchio soltanto se tangente cerchio**¹³⁷.

Tuttavia, poiché la *macro* **Cerchi per un punto tangenti una retta e un cerchio**, ha come oggetti finali tredici cerchi, nove dei quali appaiono solo in alcune configurazioni particolari, non riproducibili con il movimento di B , F e r , ho determinato i cerchi soluzione corrispondenti ai restanti quattro, tralasciando i casi particolari per analizzarli successivamente¹³⁸.

Fatto ciò, poiché per ottenere una figura interattiva completa occorre considerare l'unione delle figure relative a ciascuno dei casi particolari, ho scelto di definire come per il problema iniziale, delle *macro* relative a ciascuna di tali figure, al fine di ottenere la figura finale mediante la loro applicazione simultanea. Pertanto, evidenziando la retta r e i cerchi \mathcal{C} e \mathcal{C}' , come oggetti iniziali, e gli otto cerchi determinati come oggetti finali, ho definito la *macro* **Cerchi tangenti una retta e due cerchi – I**, che in alcune configurazioni dà luogo a qualcuno dei cerchi che soddisfano le condizioni del problema.

Per determinare ulteriori cerchi soluzione, dal momento che la mobilità degli oggetti che costituiscono i dati iniziali del problema rende arbitraria la scelta di definire r' come retta passante per N , ho **ridefinito** tale retta identificandola con la **retta parallela** a r , passante per N' (fig. 39), ed ho così ottenuto altri otto cerchi che al variare della configurazione in cui si presentano i dati iniziali si scambiano il ruolo di soluzioni del problema.

¹³⁶ Considerando sia i cerchi per P , sia i cerchi per P' .

¹³⁷ Per non far apparire cerchi errati occorre applicare entrambe le *macro* a tutti i cerchi che si scambiano il ruolo di soluzioni del problema, in quanto, il fatto che uno di essi sia tangente a r , non implica che esso sia tangente a \mathcal{C} (fig. 36), e viceversa (fig. 37).

¹³⁸ La *macro* in questione, è unione di tre *macro* relative, rispettivamente, al caso generale, al caso in cui il cerchio e la retta dati sono tangenti, e al caso in cui il centro del cerchio dato giace sulla retta data. In particolare, facendo riferimento alla figura in costruzione, la prima di tali *macro* dà luogo a sei cerchi, due dei quali appaiono solo se B giace su una delle tangenti a \mathcal{C} parallele a r' , la seconda dà luogo a un cerchio che appare se \mathcal{C} e r' sono tangenti, e la terza dà luogo a sei cerchi che vengono visualizzati solo se F giace su r' .

... carried

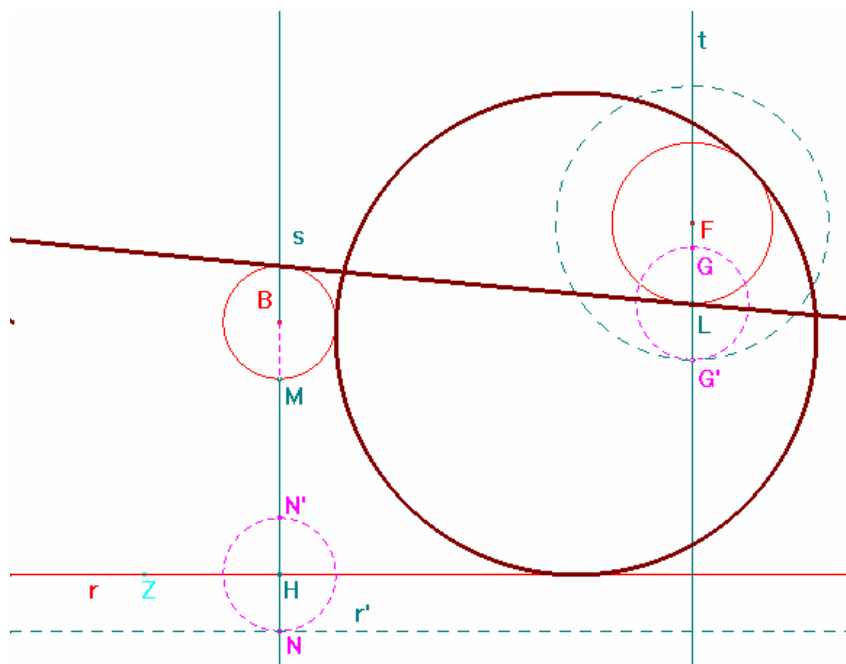


Figura 40

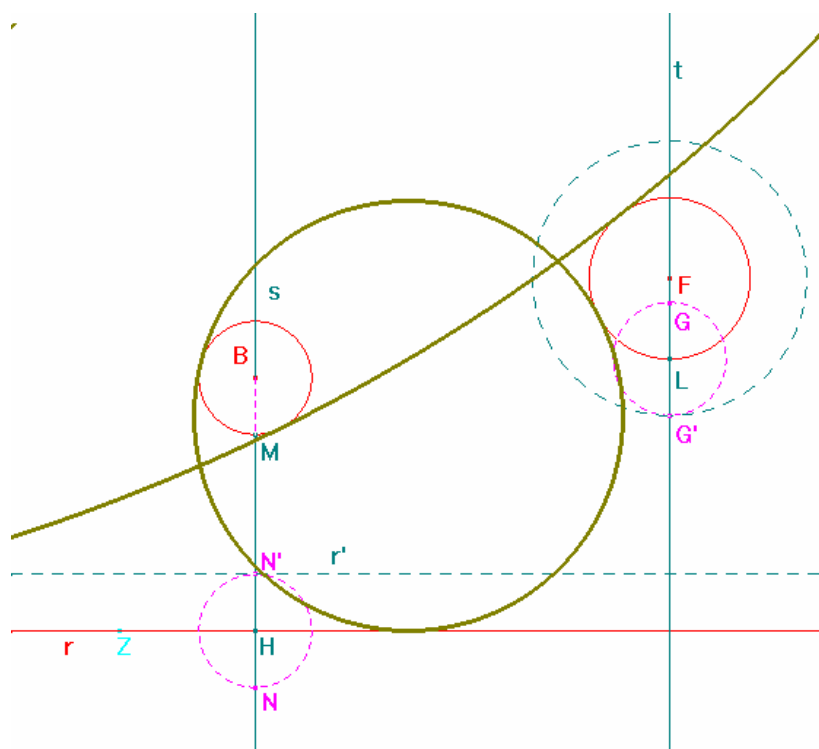


Figura 41

Evidenziati quindi, \mathcal{C}' , \mathcal{C} e r , come oggetti iniziali, e gli otto cerchi individuati in ciascuna delle due figure come oggetti finali, ho definito le *macro* **Cerchi tangenti una retta e due cerchi – III e IV**, che insieme permettono di individuare le altre quattro soluzioni, che il problema in esame ammette in generale.

Per quanto riguarda le soluzioni corrispondenti ai nove cerchi finali della *macro* **Cerchi per un punto tangenti una retta e un cerchio**, che appaiono solo in alcuni casi specifici¹³⁹, quelle relative ai sei cerchi che appaiono quando F giace su r' (due dei quali appaiono solo se B giace su una delle tangenti a G parallele a r), rappresentano un caso particolare esclusivamente dal punto di vista costruttivo, pertanto non ho ritenuto sensato analizzarle separatamente, al contrario, sia i cerchi che appaiono solo nel caso in cui G e r' sono tangenti, sia quelli che appaiono solo nel caso in cui B giace su una delle tangenti a G parallele a r , permettono di individuare i cerchi soluzione corrispondenti a particolari configurazioni di \mathcal{C} , \mathcal{C}' e r , pertanto li ho esaminati.

Più precisamente, nel caso in cui \mathcal{C} è tangente a r , alcuni cerchi soluzione si ottengono mediante l'unico cerchio passante per B e tangente G e r' , che appare solo se G e r' sono tangenti¹⁴⁰, invece nel caso in cui i cerchi \mathcal{C} e \mathcal{C}' hanno una tangente comune parallela a r , alcuni cerchi soluzione si ottengono in corrispondenza dei due cerchi passanti per B e tangenti G e r' , che appaiono solo se B giace su una delle tangenti a G parallele a r . Poiché la costruzione dei cerchi soluzione nei casi sopraindicati è finalizzata alla realizzazione di ulteriori figure che illustrano il problema in esame, ho ridefinito opportunamente B , \mathcal{C} e \mathcal{C}' e ho poi eseguito la costruzione precedentemente descritta su ciascuno dei nuovi cerchi visualizzati.

In particolare, per determinare i cerchi soluzione nel caso in cui \mathcal{C} è tangente a r , ho determinato il **punto d'intersezione** K , delle rette t e r (fig. 42), nella figura relativa al caso generale in cui r' passa per N , e, dopo aver **ridefinito** \mathcal{C} come cerchio di centro F passante per K , ho costruito come precedentemente i cerchi concentrici all'unico cerchio passante per B e tangente G e r' , che appare solo se G e r' sono tangenti, passanti rispettivamente per

¹³⁹ Nota 138.

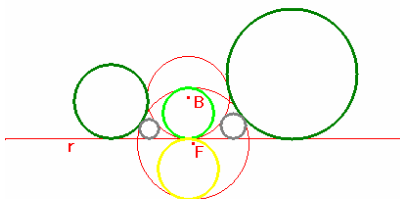
¹⁴⁰ Gli altri cerchi soluzione si ottengono mediante le *macro* **Cerchi tangenti una retta e due cerchi – I, II, III, IV**.

il punto d'intersezione P , della semiretta BC con \mathcal{C}' , e per il simmetrico P' , di P rispetto a B (fig. 43), annullando la costruzione di cerchi errati con l'ausilio delle *macro* **Cerchio soltanto se tangente cerchio** e **Cerchio soltanto se tangente retta**¹⁴¹. Successivamente, ho evidenziato nell'ordine la retta r , il cerchio \mathcal{C}' , e il cerchio \mathcal{C} , come oggetti iniziali, e i due cerchi ottenuti come oggetti finali, definendo così la *macro* **Cerchi tangenti due cerchi e una retta** – **V**, che dà luogo a due dei cerchi soluzione solo nel caso in cui \mathcal{C} e r sono tangenti.

E, dopo aver **ridefinito** la retta r' , identificandola con la retta parallela a r passante per N' , ho definito la *macro* **Cerchi tangenti una retta e due cerchi** – **VI**, che insieme alla precedente dà luogo ai soli quattro cerchi che soddisfano le condizioni del problema esclusivamente se \mathcal{C} e r sono tangenti, evidenziando nell'ordine la retta r , il cerchio \mathcal{C}' , e il cerchio \mathcal{C} , come oggetti iniziali, e i due cerchi ottenuti come oggetti finali¹⁴².

¹⁴¹ Vanno applicate entrambe come nel caso generale. Nota 137.

¹⁴² Nel caso in cui il cerchio tangente a r è \mathcal{C}' , non è necessario costruire i cerchi soluzione corrispondenti ai cerchi individuati dalle *macro* **Cerchi tangenti una retta e due cerchi** – **V** e **VI**, in quanto essi si ottengono già con le *macro* **I**, **II**, **III** e **IV**. Ciò è dovuto al diverso ruolo assunto da \mathcal{C} e \mathcal{C}' , nella costruzione eseguita.



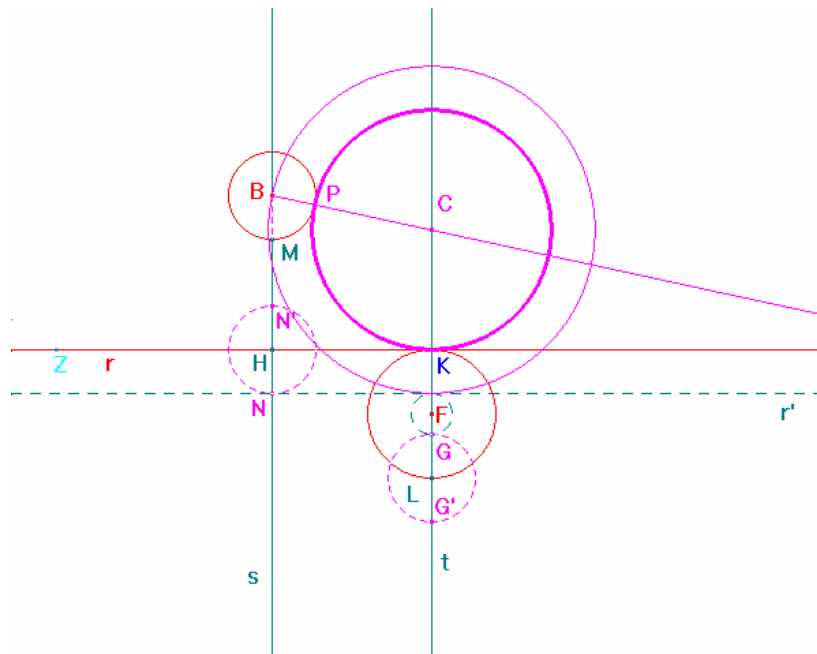


Figura 42

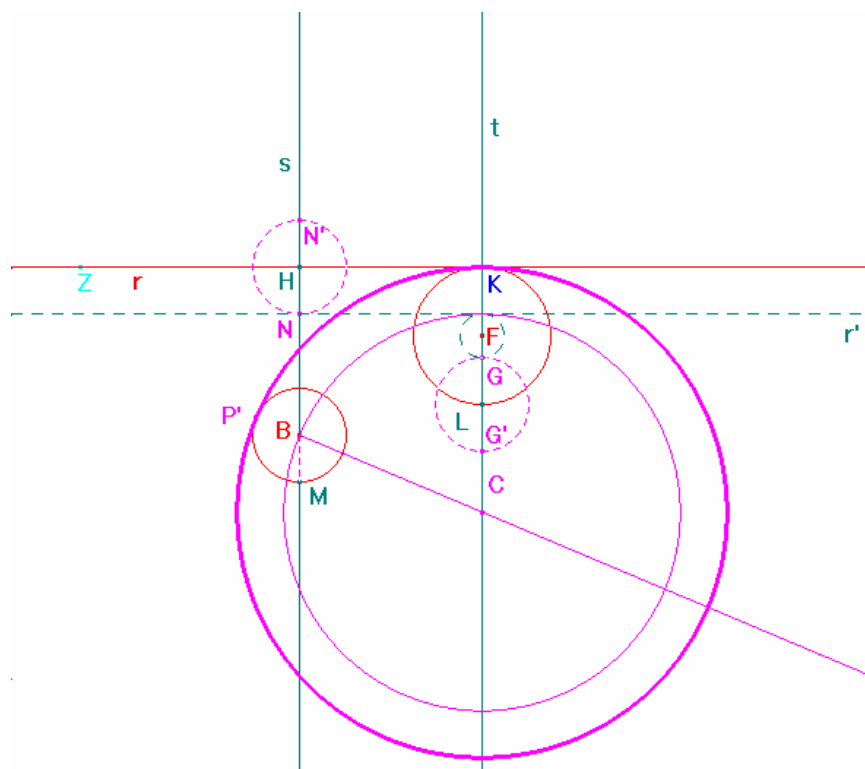
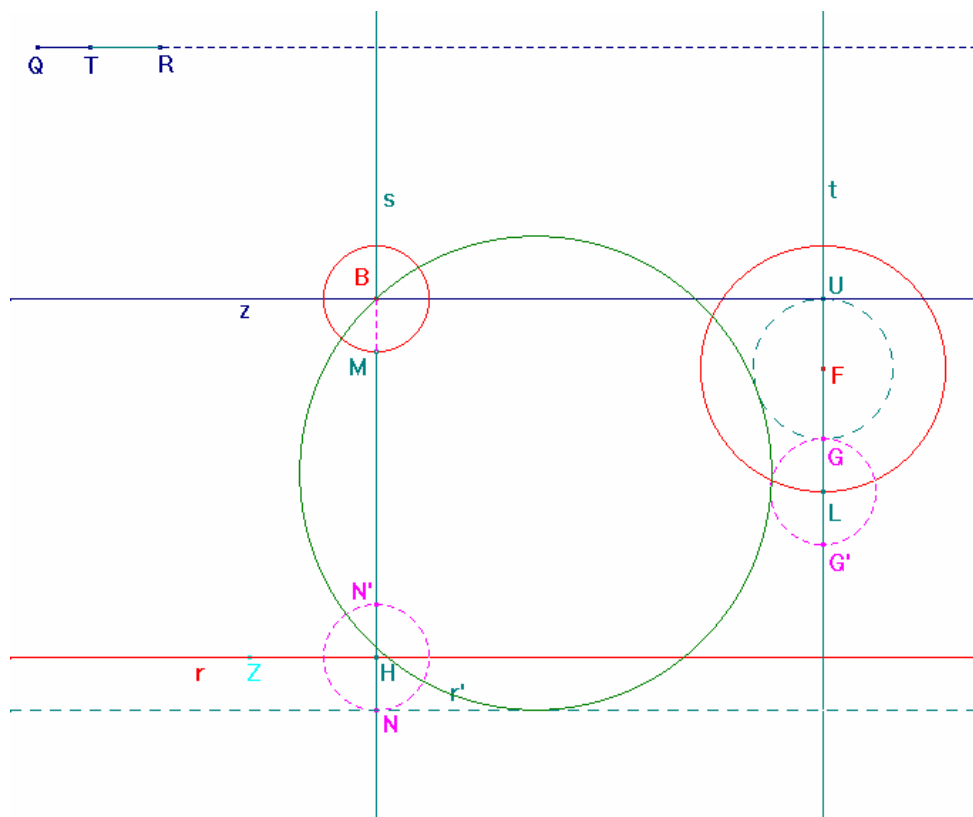


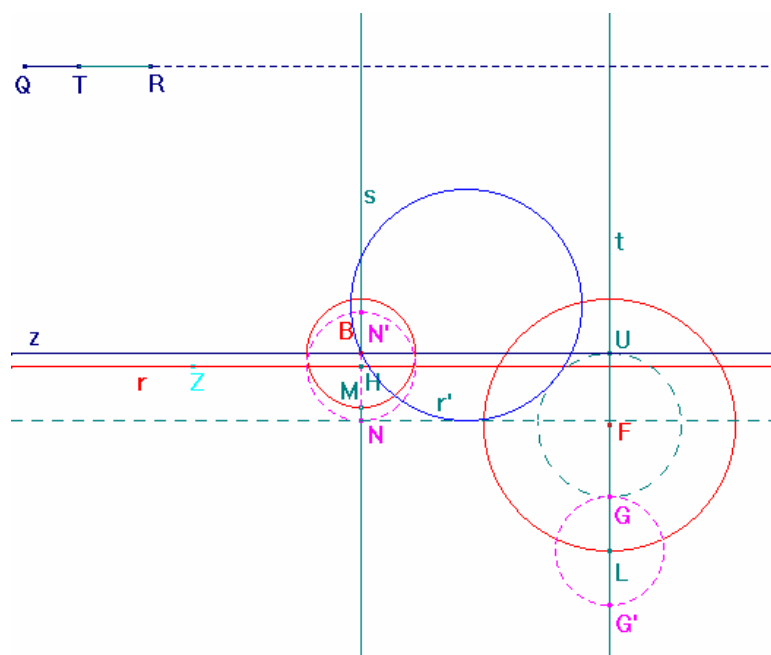
Figura 43

Più precisamente, dopo aver disegnato nella figura relativa al caso generale in cui r' passa per N , una **semiretta** di origine Q , e un **segmento** QR giacente su di essa (fig. 44), ho **riportato** tale segmento sul punto F , e ho **ridefinito** il cerchio \mathcal{C} , identificandolo con il cerchio compasso di raggio QR . Individuato poi, un **punto** T sulla semiretta QR , ho **riportato** il **segmento** QT sul punto B , e ho **ridefinito** il cerchio \mathcal{C}' , identificandolo con il cerchio compasso di raggio QT . **Riportato** inoltre il segmento TR sul punto F , ho **ridefinito** il cerchio \mathcal{G} , identificandolo con il cerchio compasso di raggio TR , e, dopo aver disegnato la **retta perpendicolare** z , a t , passante per il **simmetrico** U , di G rispetto a F , ho **ridefinito** il punto B come punto su z .



141

Per determinare i cerchi soluzione corrispondenti a tali cerchi, ho dunque costruito come precedentemente i cerchi a essi concentrici passanti rispettivamente per P , punto d'intersezione della semiretta BC con \mathcal{C}' , e per P' , simmetrico di P rispetto a B (fig. 47), annullando l'apparizione di cerchi errati con l'ausilio delle *macro* **Cerchio soltanto se tangente cerchio** e **Cerchio soltanto se tangente retta**¹⁴³.

**Figura 45**

¹⁴³ Vanno applicate entrambe come nel caso generale. Nota 137.



E, dal momento che il cerchio passante per P' , concentrico al primo dei cerchi sopraindicati, non soddisfa mai le condizioni del problema, ho evidenziato nell'ordine, la retta r , i punti B e F , la semiretta QR , e i segmenti QT e QR , come oggetti iniziali, e i tre cerchi ottenuti, come oggetti finali, definendo così la *macro* **Cerchi tangenti una retta e due cerchi – VII**, relativa al caso particolare in cui B giace su z .

Fatto ciò, dopo aver **ridefinito** la retta r' , identificandola con la retta parallela a r passante per N' (fig. 48), ho analizzato la figura ottenuta e ho appurato che il cerchio passante per P' , che nella figura precedente è stato trascurato perché non dava luogo ad alcuna soluzione, questa volta va considerato, mentre il cerchio a esso concentrico passante per P , in tale configurazione non viene più visualizzato¹⁴⁴. Pertanto, evidenziando nell'ordine la retta r , i punti B e F , la semiretta QR , e i segmenti QT e QR , come oggetti iniziali, e i tre cerchi ottenuti come oggetti finali, ho definito la *macro* **Cerchi tangenti una retta e due cerchi – VIII**, anch'essa relativa al caso particolare in cui B giace su z .

Nel caso in cui il cerchio \mathcal{C} passa per il punto G' , la retta su cui deve giacere il punto B non è la stessa che nel caso precedente, pertanto i due casi non possono essere visualizzati nella stessa figura interattiva. Tuttavia, dal momento che \mathcal{C} è stato definito con il cerchio compasso di centro F e raggio $RT = QR - QT$, per ottenere una figura interattiva relativa a tale caso sarà sufficiente ridefinire R come punto della semiretta QT' , con T' simmetrico di T rispetto a Q , nella figura interattiva relativa al caso in cui B giace su z , e \mathcal{C} passa per G .

¹⁴⁴ La sua assenza dipende dalle *macro* **Cerchio soltanto se tangente cerchio/retta**, che ne impediscono la visualizzazione nel caso in cui non soddisfa le condizioni del problema.

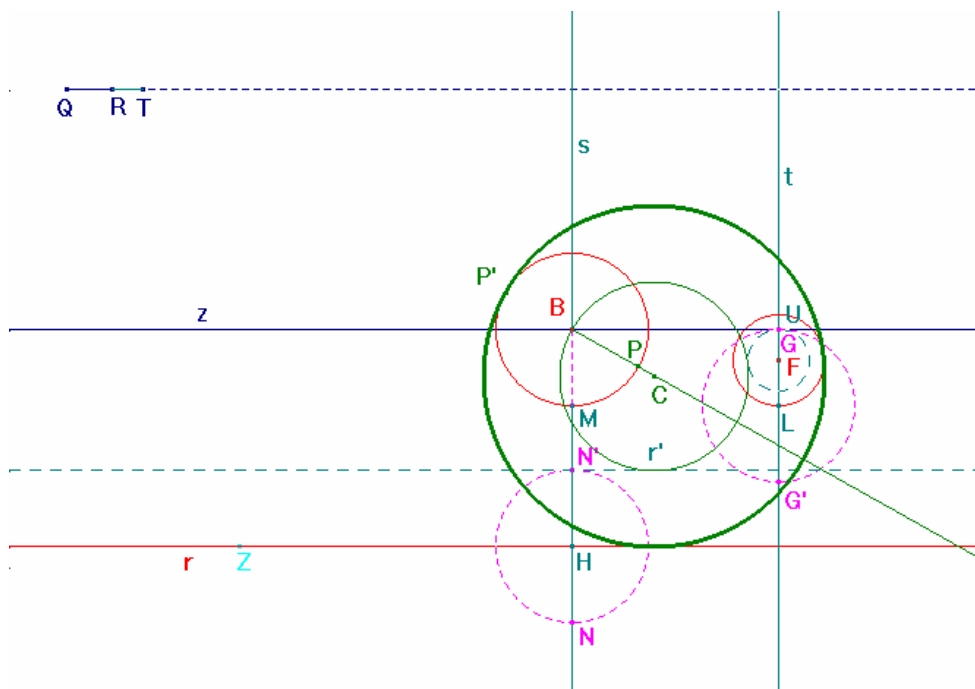


Figura 48

Oltre ai casi particolari analizzati, che nascono dal modo in cui è stata definita la *macro* relativa al problema precedente, vi è un altro caso particolare, che è interessante approfondire in quanto a esso non può essere applicato il metodo descritto da Newton e da Viète. Tale caso è quello in cui i cerchi \mathcal{C} e \mathcal{C}' hanno raggio uguale, e per esso non può essere eseguita la costruzione in cui il cerchio \mathcal{G} ha raggio uguale alla differenza dei raggi di \mathcal{C} e \mathcal{C}' , in quanto tale differenza è nulla. Per costruire i cerchi che soddisfano le condizioni del problema relativi a tale costruzione, dal momento che il cerchio \mathcal{G} si riduce a un punto, ho allora determinato i cerchi soluzione corrispondenti ai cerchi che si ottengono applicando la *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta**¹⁴⁵, alla retta r , e ai punti B e F .

Più precisamente, dopo aver disegnato in un nuovo foglio di *CABRI*, un cerchio \mathcal{C}' , di centro B , una retta r , e un punto F (fig. 49), ho disegnato la **retta perpendicolare** s , a r , passante per B , il **punto d'intersezione** H , di s con r , e uno dei due **punti d'intersezione** M , di s con \mathcal{C}' . **Riportato** poi il **segmento** BM sul punto F , e sul punto H , e individuati così il

¹⁴⁵ Paragrafo 1.6.

cerchio \mathcal{C} di centro F , e il **punto** N sulla retta s , ho disegnato la **retta parallela** r' , a r passante per N , e, mediante la *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta**, i cerchi passanti per i punti B e F , tangenti alla retta r' ¹⁴⁶.

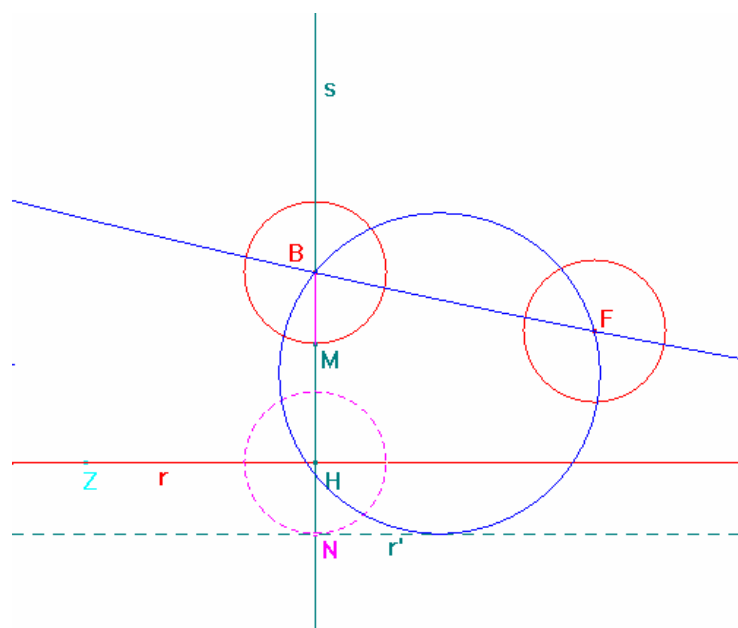


Figura 49

Successivamente, come nel caso generale, ho determinato per ognuno di essi la **semiretta** di origine B , passante per il loro centro C ¹⁴⁷, e i **cerchi** concentrici passanti, uno per il **punto d'intersezione** P , di tale semiretta con \mathcal{C}' , e l'altro per il simmetrico P' , di P rispetto a B (fig. 50).

¹⁴⁶ Tale *macro* ha tre oggetti finali, uno dei quali appare solo nel caso in cui la retta per i punti iniziali è parallela alla retta iniziale.

¹⁴⁷ Anche i centri dei cerchi ottenuti mediante la *macro* **Cerchi per due punti tangenti una retta** non compaiono in quanto sono stati nascosti prima della definizione della *macro*, ma possono essere visualizzati mediante il comando *Mostra/Nascondi*.

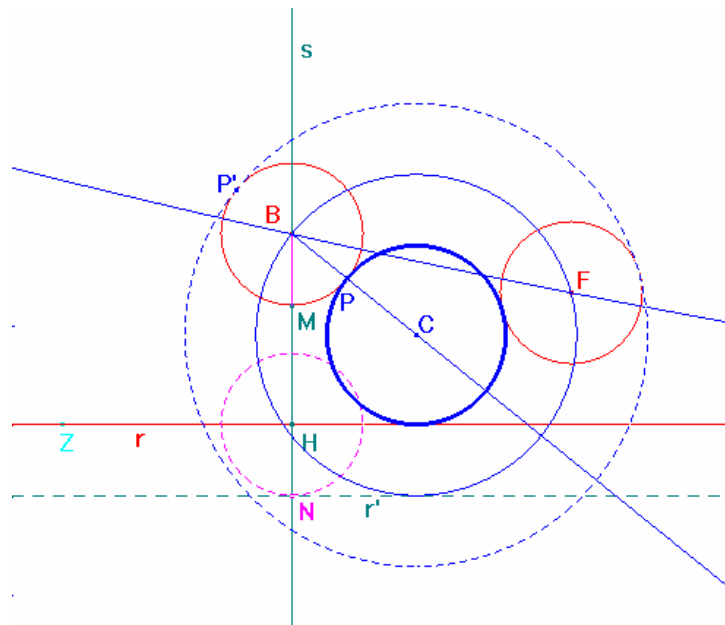


Figura 50

Poiché i cerchi \mathcal{C} e \mathcal{C}' hanno lo stesso raggio, sia i cerchi passanti per P , sia quelli passanti per P' , sono tangenti a \mathcal{C} e \mathcal{C}' , tuttavia, dal momento che al variare della configurazione in cui appaiono gli oggetti che costituiscono i dati iniziali, solo alcuni di essi sono tangente alla retta r , per invalidare la costruzione di cerchi errati, ho applicato a tutti i cerchi individuati la *macro* **Cerchio soltanto se tangente retta**. Sebbene ciò sia sufficiente a garantire che nella figura in costruzione i cerchi determinati risolvano le condizioni del problema, al fine di creare un *macro* relativa al caso in questione, applicabile in una figura in cui i cerchi iniziali hanno raggi non sempre uguali, ho applicato a ciascuno dei cerchi ottenuti anche la *macro* **Cerchio soltanto se tangente cerchio**. Evidenziati dunque \mathcal{C}' , \mathcal{C} e r , come oggetti iniziali, e i sei cerchi ottenuti come oggetti finali, ho definito la *macro* **Cerchi tangenti due cerchi e una retta – IX**, che dà luogo a soluzioni del problema solo se i cerchi iniziali sono uguali.

E, come nel caso generale, ho determinato gli ulteriori cerchi che soddisfano le condizioni del problema in esame, nel caso in considerazione, **ridefinendo** la retta r' come **retta parallela** a r , passante per il **simmetrico** N' , di N rispetto al punto H (fig. 51). Evidenziando poi, \mathcal{C}' , \mathcal{C} e r , come oggetti iniziali, e i sei cerchi così determinati come oggetti finali, ho definito la *macro* **Cerchi tangenti due cerchi e una retta – X**, che come

la precedente agisce solo se i cerchi evidenziati sono uguali, e unitamente a essa permette di individuare tutti i cerchi che appaiono solo se \mathcal{C} e \mathcal{C}' sono uguali.

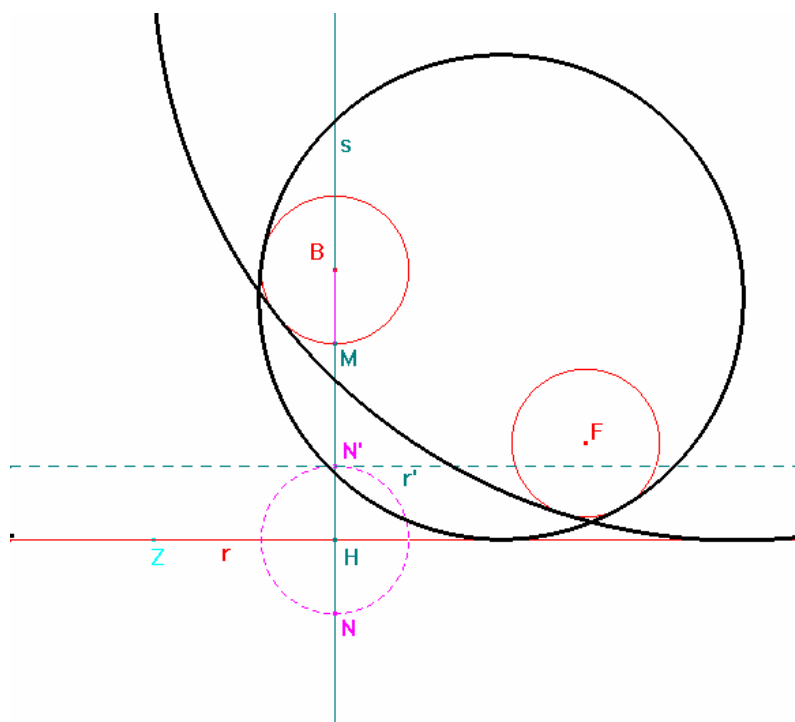


Figura 51

Completata l'analisi dei casi particolari, ho disegnato in un nuovo foglio di *CABRI*, un **cerchio** \mathcal{C} di centro B , un **cerchio** \mathcal{C}' di centro F , e una **retta** r , e ho applicato a essi le **macro Cerchi tangenti una retta e due cerchi – I, II, III, IV, V, VI, IX e X**, per ottenere una figura interattiva che illustra il problema in esame nel caso generale (fig. 52), nel caso in cui \mathcal{C}' o \mathcal{C} sono tangenti a r , e nel caso in cui i cerchi \mathcal{C} e \mathcal{C}' sono uguali.

Osservato che il movimento degli oggetti che costituiscono i dati iniziali finalizzato a visualizzare le soluzioni del problema nei casi particolari sopraindicati, non produce l'effetto desiderato, ho poi **ridefinito** \mathcal{C}' come cerchio di centro F passante per il piede della perpendicolare a r condotta da F , per ottenere una seconda figura interattiva che illustra il problema in esame (fig. 53), nel caso in cui \mathcal{C}' è tangente a r . Successivamente, ho **ridefinito** \mathcal{C} come cerchio di centro B passante per il piede della perpendicolare a r condotta da B , per ottenere una terza figura interattiva che illustra il problema in esame

(fig. 54), in cui si possono visualizzare le soluzioni del problema nel caso in cui sia \mathcal{C} che \mathcal{C}' sono tangenti a r . E infine, ho **ridefinito** \mathcal{C} (nella prima figura interattiva), come cerchio compasso di centro F e raggio uguale al raggio di \mathcal{C}' (fig. 55), per ottenere un'ulteriore figura interattiva che illustra il problema in esame nel caso in cui i cerchi iniziali sono uguali.

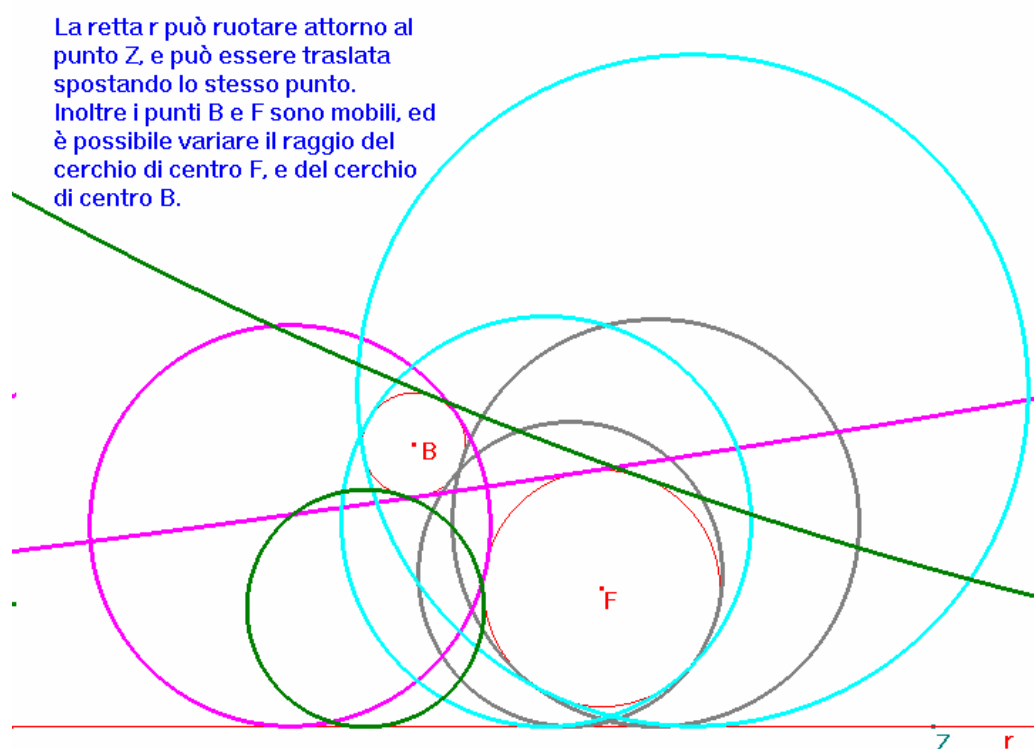


Figura 52

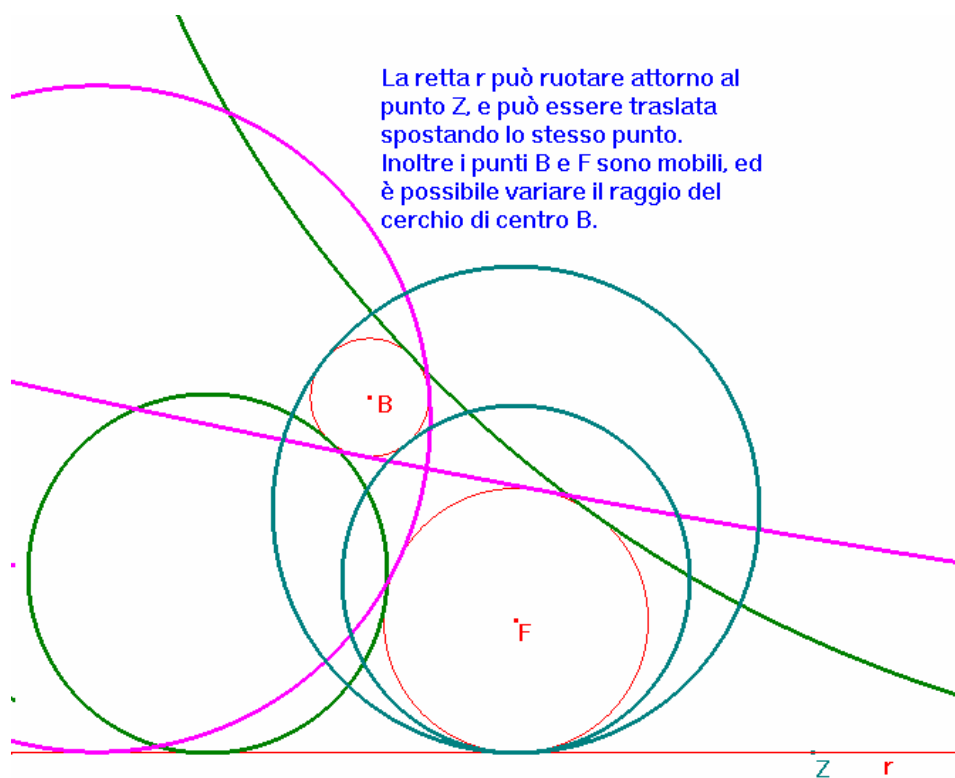


Figura 53

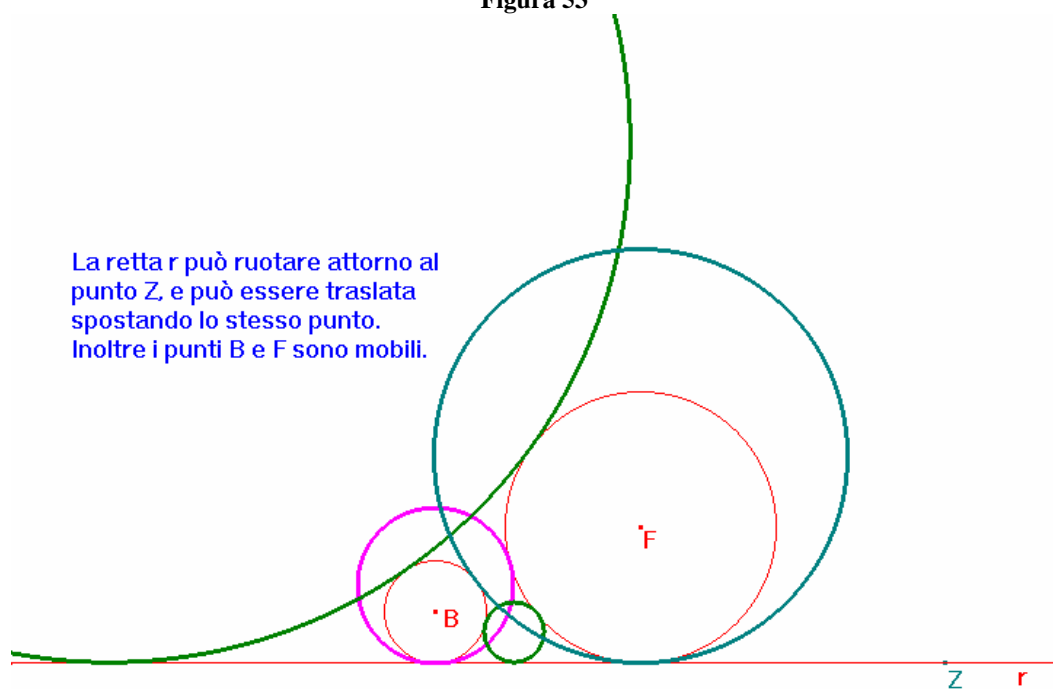


Figura 54

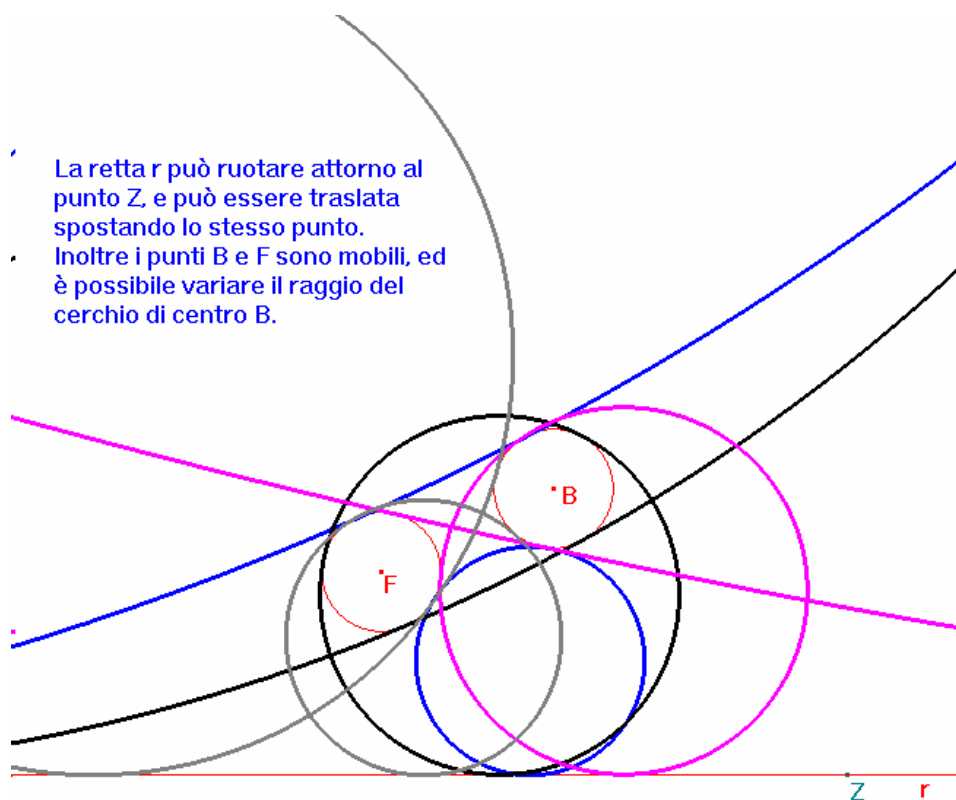
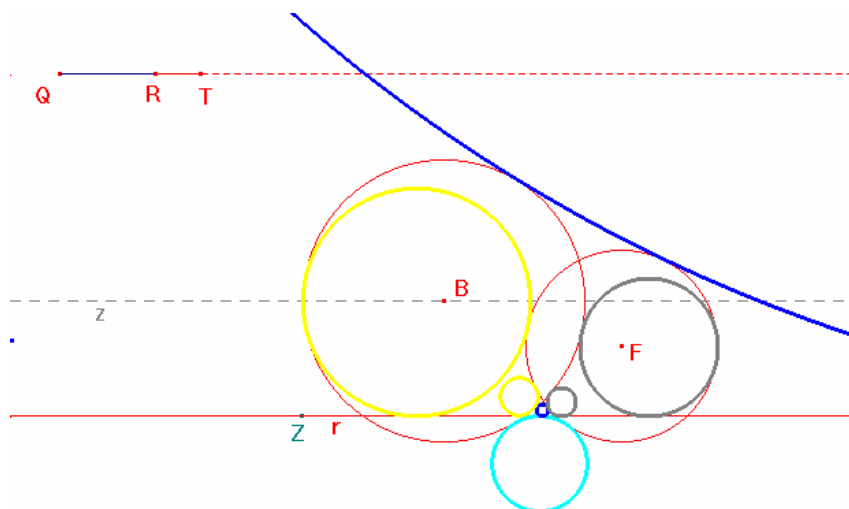


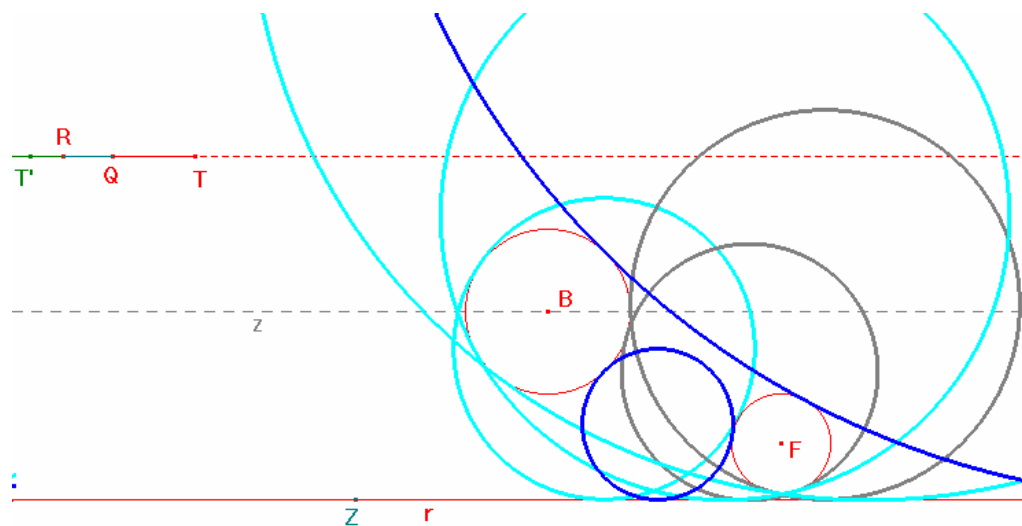
Figura 55

Per poter visualizzare le soluzioni del problema nei casi in cui \mathcal{C} e \mathcal{C}' hanno una tangente comune parallela a r , ho poi applicato le *macro* **Cerchi tangenti una retta e due cerchi – I, II, III, IV, V, VI, VIII, IX e X**, nella figura in cui ho definito la *macro* **VII**, ottenendo la quinta figura interattiva, che illustra il problema nel caso in cui i cerchi \mathcal{C} e \mathcal{C}' hanno una tangente comune parallela a r , e giacciono nello stesso semipiano individuato dalla tangente (fig. 56). E infine, ho **ridefinito** il punto R , come punto sulla **semiretta** di origine Q passante per il **simmetrico** T' , di T rispetto a Q , ottenendo la sesta figura interattiva, che illustra il problema nel caso in cui i cerchi \mathcal{C} e \mathcal{C}' hanno una tangente comune parallela a r , ma giacciono in semipiani opposti individuati dalla tangente (fig. 57).



La retta r può ruotare attorno al punto Z , e può essere traslata spostando lo stesso punto, inoltre il punto F è mobile, e il punto B lo è sulla retta z .

Infine spostando i punti R e T, lungo la semiretta su cui giacciono, è possibile variare rispettivamente, il raggio del cerchio di centro F, e il raggio del cerchio di centro B.

Figura 56

La retta r può ruotare attorno al punto Z , e può essere traslata spostando lo stesso punto, inoltre il punto F è mobile, e il punto B lo è sulla retta z . Infine spostando i punti R e T , lungo le semirette su cui giacciono, è possibile variare rispettivamente, il raggio del cerchio di centro F , e il raggio del cerchio di centro B .

Figura 57

1.10 Problema LX

Descrivere una sezione conica che passi per quattro punti dati, e che in uno di questi punti tocchi una linea retta data di posizione.

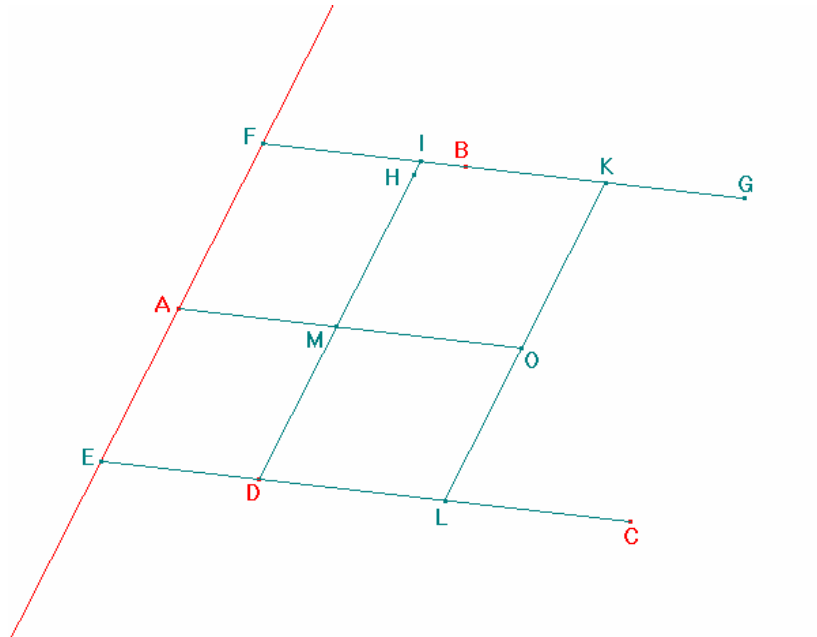


Figura 1

Considerati i punti A , B , C e D , e la retta AE , per risolvere il problema Newton individua due ulteriori punti della conica, G e H , il suo centro O , e l'ordinata MH del diametro passante per A , affermando che la loro conoscenza determina la sezione conica.

Sebbene per costruire una conica con *CABRI* sia sufficiente conoscere, oltre ai punti dati, solo un altro punto, il metodo mostrato da Newton per determinare G e H , presenta un inconveniente costituito dal fatto che l'esatta individuazione di tali punti, rispettivamente sulle rette FI e ID , dipende dalla posizione del punto E , d'intersezione della retta CD con la retta data AE , rispetto ai punti A , C e D ¹⁴⁸.

Per realizzare un disegno interattivo relativo al problema in esame, ho dunque fatto riferimento ad un'altra costruzione, più semplice, presentata dallo stesso Newton nel *Solutio Problematis Veterum de Loco Solido*.

In tale scritto egli propone la sua soluzione del problema classico del *luogo solido*, che ha inteso come il problema dell'identificazione con la generica sezione conica, e quindi della

¹⁴⁸ Paragrafo 5.22.

costruzione di una conica che passa per cinque punti dati, tocca rette date di posizione, o soddisfa altre condizioni equivalenti.

In particolare, nella proposizione VI mostra come costruire una conica di cui sono dati cinque punti A, B, C, D e P , e nel corollario 1 di tale proposizione spiega poi come riadattare la costruzione nel caso in cui alla conoscenza del punto D si sostituisce la conoscenza della tangente Bt , nel punto dato B ¹⁴⁹.

Più precisamente, disegnati i segmenti AB e AC (fig. 2), e condotte dal punto P le rette PT e PR , a essi parallele, Newton chiama T il punto d'intersezione delle rette BD e PT , e, r e R i punti d'intersezione di PR , rispettivamente con CB e CD . Detto poi t , il punto d'intersezione della retta PT con la retta per r parallela a RT , in virtù del corollario I, della proposizione V, afferma che la retta Bt è tangente alla conica nel punto B ¹⁵⁰. E ancora, detto r_2 il punto d'intersezione di PR con la retta per C parallela a Bt , e preso t_2 in PT tale che $Pt_2 : Pr_2 = PT : PR$, osserva che la retta parallela a RT passante per r_2 , interseca PT in t_2 ¹⁵¹, e che il punto d , in cui Bt_2 interseca Cr_2 , giace sulla conica¹⁵². A questo punto, osservato che detto O il punto medio di Cd , la retta BO intercetta un diametro di ordinate CO e dO ¹⁵³, egli estende BO fino a intersecare PT in t_3 , e, condotta per tale punto la

¹⁴⁹ *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. IV, pp. 294 - 297.

¹⁵⁰ Facendo riferimento alla figura 2, la proposizione V assicura che, se tra i punti A e P di una conica è inscritto un parallelogramma $AQPS$, e i suoi lati AQ e AS sono estesi fino a incontrare la curva in B e C , e ancora i segmenti BD e CD che li uniscono a un altro punto D della conica, incontrano i lati opposti PS e PQ , in T e R , allora il rapporto di PR su PT è dato. Viceversa, se tale rapporto è dato, il punto D appartiene alla conica passante per i punti A, B, C e P . Il corollario 1 di tale proposizione assicura invece che, se r è il punto d'intersezione di BC e PQ , e in PT è preso Pt , tale che $Pt : Pr = PT : PR$, allora Bt è tangente alla conica in B . Nel caso in questione, poiché rt è parallela a RT , si ha che i triangoli RPT e rPt sono simili, pertanto vale la proporzione $Pt : Pr = PT : PR$, e di conseguenza Bt è una tangente della conica.

¹⁵¹ Detto J il punto d'intersezione della retta PT con la retta per r_2 parallela a RT , si ha che i triangoli RPT e r_2PJ sono simili, pertanto $PJ : Pr_2 = PT : PR$, e da ciò segue che J coincide con t_2 .

¹⁵² Essendo il rapporto $\frac{Pt_2}{Pr_2}$ uguale al rapporto $\frac{PT}{PR}$, esso è dato, pertanto per la proposizione V (nota 150) il punto d giace sulla conica passante per i punti A, B, C e P .

¹⁵³ Data una corda, ogni diametro passante per il suo punto medio è coniugato al diametro a essa parallelo, e quindi dimezza tutte le corde a essa parallele. Inoltre, ciascuna delle semicorde in cui un diametro divide una data corda è detta ordinata di tale diametro. Pertanto, essendo O il punto medio della corda Cd , ed essendo B un punto della conica, si ha che la retta BO intercetta sulla conica un diametro coniugato alla direzione di Cd , le cui ordinate sono CO e dO .

Nel corollario I Newton afferma poi che, se i punti sono quattro, A, B, C e P , ed è data la tangente Bt , allora D coincide con B , CD con CB , BD con Bt , R con r , e T con t , mentre il resto della costruzione è invariato.

Per eseguire tale costruzione con *CABRI*, dopo aver disegnato quattro **punti** A, B, C e P (fig. 3), e una **retta** s passante per B , ho disegnato le **rette** AB e AC , e ho condotto da P le **rette parallele** h e g , rispettivamente ad AB e AC . Disegnati poi, i **punti d'intersezione** R , della **retta** CB con g , e T , di s con h , ho determinato i **punti d'intersezione** r_2 , della retta g con la **retta parallela** a s passante per C , e t_2 , della retta h con la **retta parallela** al **segmento** RT passante per r_2 . E infine, dopo aver determinato il **punto d'intersezione** d , della **retta** Bt_2 con la retta Cr_2 , ho disegnato la **conica** passante per i punti A, B, C, P e d , che soddisfa le condizioni richieste dal problema.

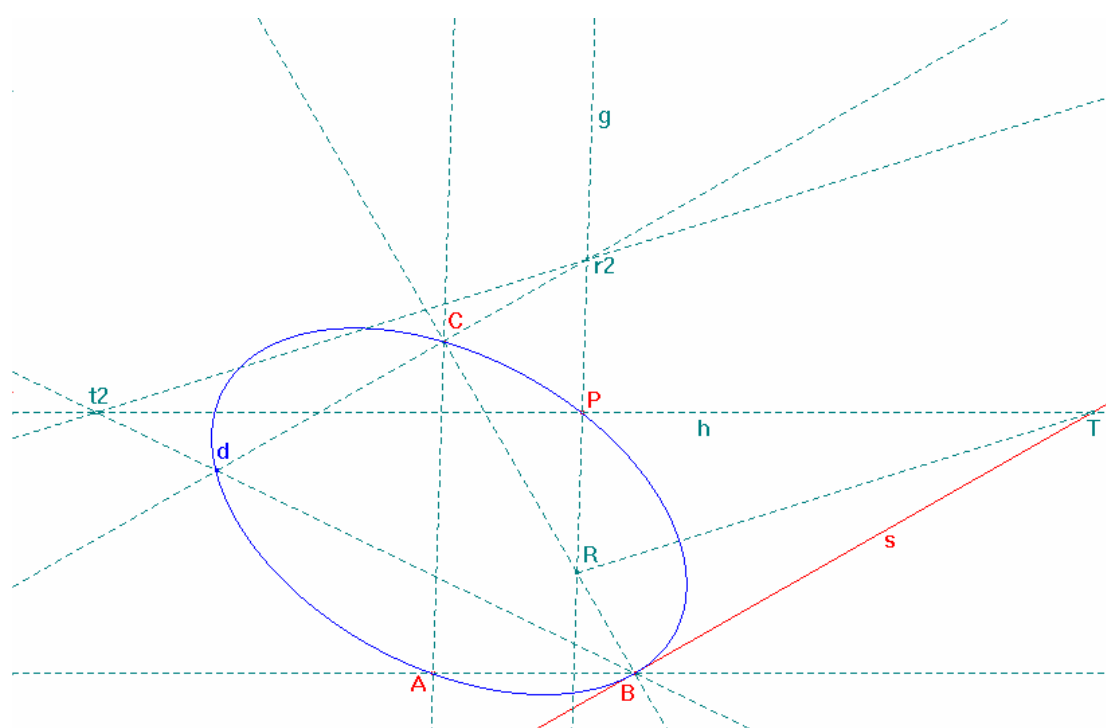


Figura 3

Analizzando la figura costruita per stabilirne il corretto funzionamento, ho tuttavia appurato che sebbene corretta essa è ancora incompleta, in quanto, nel caso in cui la retta s è

parallela alla retta AC o alla retta CP , e nei casi in cui il punto A o il punto C giacciono su s , non appare nulla¹⁵⁷. Per completare la costruzione, ho allora analizzato ciascun caso separatamente, disponendo gli oggetti che costituiscono i dati iniziali nelle configurazioni corrispondenti. In particolare, dopo aver disposto A e C in modo che la retta passante per essi fosse parallela a s (fig. 4), ho disegnato il **punto medio** O , di C e d , il **punto d'intersezione** t_3 , della **retta** BO con la retta h , la **retta parallela** al **segmento** RT passante per t_3 , il **punto d'intersezione** r_3 , di tale retta con la retta g , e il **punto d'intersezione** d_2 , della retta Cr_3 con la retta BO . A questo punto, poiché d_2 giace sulla conica che soddisfa le condizioni del problema in tale configurazione, per far sì che la conica passante per B , P , A , C e d_2 , venga visualizzata solo nel caso in cui A coincide con d , dopo aver **misurato** la lunghezza del **segmento** BO , e la distanza w , di A da d , ho **calcolato** la quantità $z = e^{\sqrt{-w}} = \begin{cases} 1 & \text{se } A \text{ coincide con } d \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases}$ e in seguito ne ho **calcolato** il prodotto per la lunghezza di BO . **Trasportando** il risultato ottenuto sul punto B , ho poi individuato un punto K , che appare solo se A coincide con d , pertanto, determinato il **punto d'intersezione** O' , del **cerchio** di centro B passante per K con la retta OB , e **ridefinito** d_2 come punto d'intersezione della retta BO' con la retta Cr_3 , ho disegnato la **conica** passante per i punti B , P , C , A e d_2 , che appare solo se A coincide con d , ovvero se AC è parallela a s , ma P non giace su s ¹⁵⁸.

¹⁵⁷ Il fatto che nel caso in cui P giaccia su s , se AC e s non sono parallele la conica venga visualizzata, mentre nei casi in cui vi giacciono A o C , ciò non accade, è dovuto al diverso ruolo assunto dai punti P , A e C nella costruzione. Inoltre, nel caso in cui s è parallela ad AC o CP , non appare nulla in quanto d coincide rispettivamente con A o con P .

¹⁵⁸ Se AC è parallela a s , e P giace su s , non appare nulla in quanto il punto r_2 non esiste.

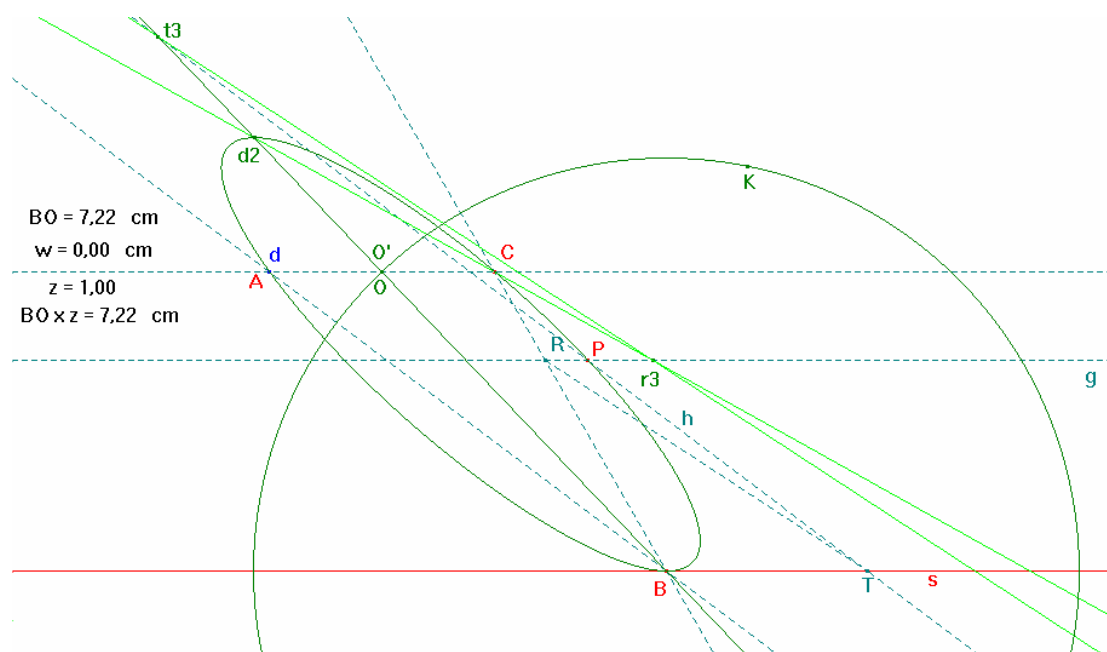


Figura 4

Per non ripetere la costruzione nel caso in cui CP è parallela a s , ho definito la *macro Conica passante per quattro punti e tangente una retta in uno di essi – I*, evidenziando nell'ordine B, s, A, C e P , come oggetti iniziali, e la conica disegnata come oggetto finale, e l'ho applicata nella figura in costruzione, evidenziando nell'ordine B, s, P, C e A (fig. 5).

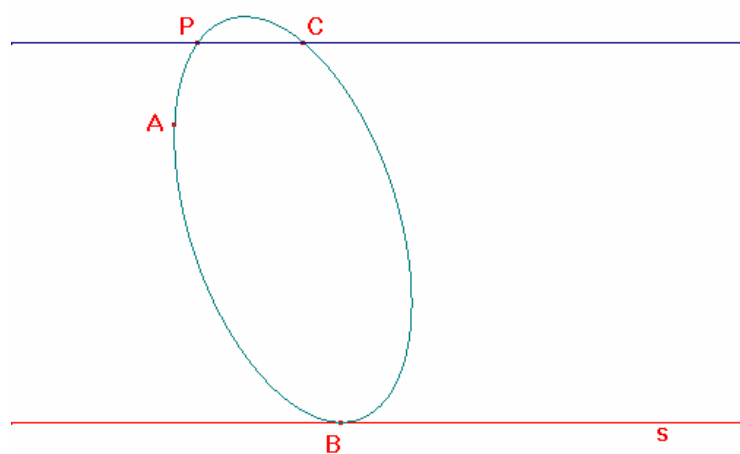


Figura 5

Invece, per disegnare la conica che risolve il problema nel caso in cui AC è parallela a s , ma P giace su s , dopo aver condotto da C la **retta parallela** v , alla retta s (fig. 6), e aver **misurato** la lunghezza di AC e le distanze d_{Av} , del punto A dalla retta v , e d_P , del punto P dalla retta s , ho **calcolato** le quantità $i = e^{\sqrt{-d_{Av}}} = \begin{cases} 1 & \text{se } A \text{ giace su } v \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases}$ e $j = e^{\sqrt{-d_P}} = \begin{cases} 1 & \text{se } P \text{ giace su } s \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases}$ e successivamente il loro prodotto per la lunghezza di AC . **Trasportando** il risultato ottenuto sul punto C , ho poi individuato un punto I , che appare solo se A giace su v , e P su s , pertanto, determinato il **punto d'intersezione** A' , del **cerchio** di centro C passante per I con la **retta** AC , ho disegnato la **conica** passante per i punti B, P, C, A' e per il **punto medio** M di A e C' , che si spezza nelle rette parallele BP e AC , e appare solo se A giace su v (ovvero se la retta AC è parallela a s), e P giace su s ¹⁵⁹.

$$\begin{aligned} AC &= 1,46 \text{ cm} \\ d_{Av} &= 0,00 \text{ cm} \\ d_P &= 0,00 \text{ cm} \\ i &= 1,00 & j &= 1,00 \\ AC \times i \times j &= 1,46 \text{ cm} \end{aligned}$$

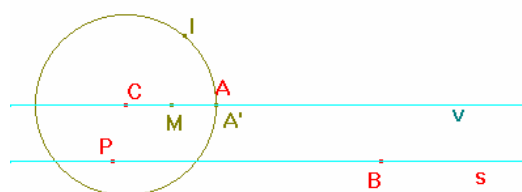


Figura 6

Analogamente, per costruire la conica nel caso in cui A giace su s , dopo aver **misurato** la lunghezza del **segmento** CP (fig. 7), e la distanza d_A , del punto A dalla retta s , ho **calcolato** la quantità

¹⁵⁹ Per disegnare la conica non è necessario disegnare M , ma è sufficiente evidenziare un qualsiasi punto di v o di s . La scelta fatta nasce dall'esigenza di far dipendere l'intera costruzione dalla retta s , e dai punti A, B, P e C , che costituiscono i dati iniziali del problema, per non precludere la possibilità di definire una *macro* a esso relativa.

$$n = e^{\sqrt{-d_A}} = \begin{cases} 1 & \text{se } A \text{ giace su } s \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e successivamente il suo prodotto per la lunghezza di CP . **Trasportando** il risultato ottenuto sul punto P , ho poi individuato un punto U , che appare solo se A giace su s , pertanto, determinato il **punto d'intersezione** C' , del **cerchio** di centro P passante per U con la **retta** PC , ho disegnato la **conica** passante per i punti B , A , P , C' e per il **punto medio** M' di P e C' , che si spezza nelle rette BA e CP , e appare solo se A giace su s ¹⁶⁰.

$d_A = 0,00$ cm
 $n = 1,00$
 $CP = 2,44$ cm
 $CP \times n = 2,44$ cm

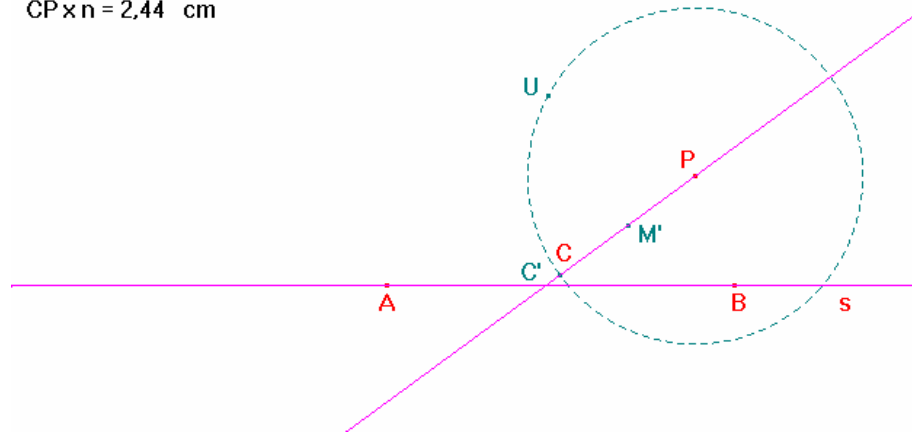
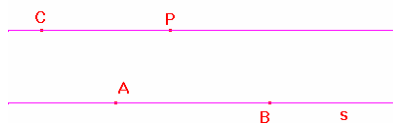


Figura 7

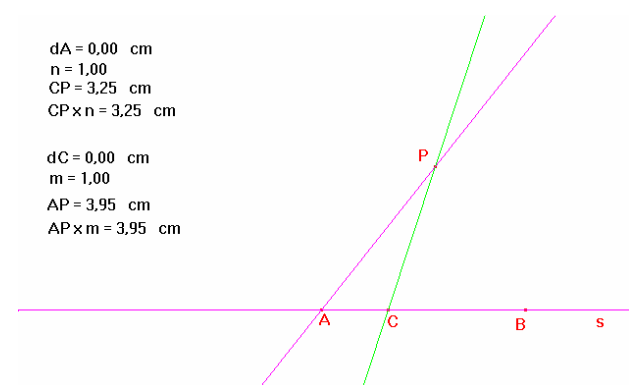
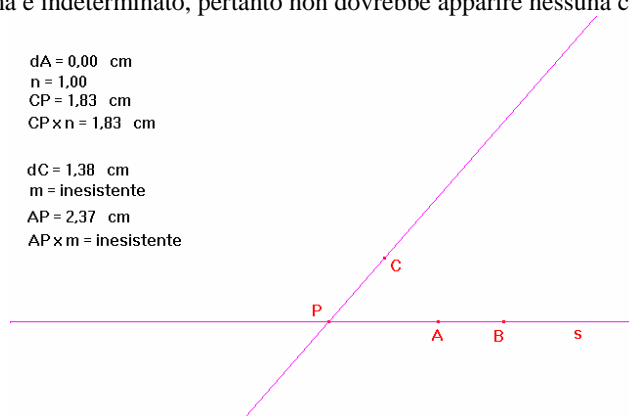
Come in precedenza, per non ripetere la costruzione del caso in cui C giace su s , ho definito la **macro Conica passante per quattro punti e tangente una retta in uno di essi – II**, evidenziando nell'ordine B , s , A , C e P , come oggetti iniziali, e la conica disegnata come oggetto finale, e l'ho applicata nella figura in costruzione, evidenziando nell'ordine B , s , C , A e P (fig. 8).

¹⁶⁰ La conica appare anche nel caso in cui la retta CP è parallela a s .



Sebbene in tal modo abbia ottenuto una figura completa in cui al variare della posizione dei punti A , B , C e P , sei coniche si scambiano il ruolo di soluzione del problema, essa non è più corretta, in quanto nel caso in cui due dei tre punti A , C e P giacciono su s , appaiono le coniche che si spezzano nella retta s e nella retta passante per due dei tre punti A , C e P ¹⁶¹.

¹⁶¹ In tali casi il problema è indeterminato, pertanto non dovrebbe apparire nessuna conica.



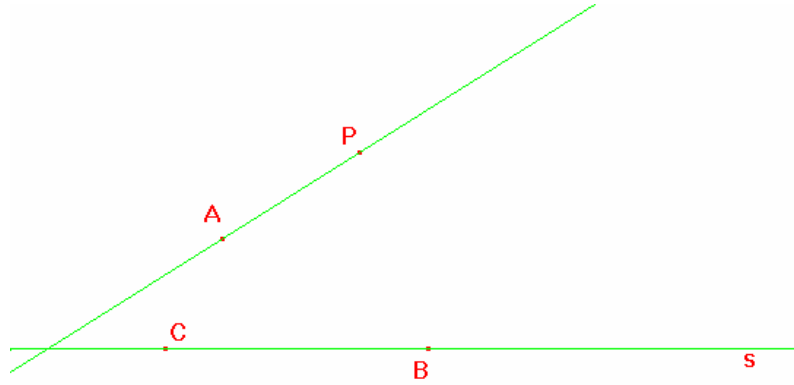


Figura 8

Per invalidare la costruzione di coniche errate, dopo aver **calcolato** le quantità:

$$q = \frac{d_A + d_P}{d_A + d_P} = \begin{cases} 1 & \text{se } A \text{ e } P \text{ non giacciono entrambi su } s \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$p = \frac{d_A + d_C}{d_A + d_C} = \begin{cases} 1 & \text{se } A \text{ e } C \text{ non giacciono entrambi su } s \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases},$$

ho **calcolato** il prodotto:

$$n \times q \times p \times CP = \begin{cases} CP & \text{se } A \text{ giace su } s, \text{ ma i punti } P, \text{ o } C \text{ no} \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases},$$

e ho **ridefinito** il punto U (fig. 9), mediante la sua identificazione con il punto ottenuto **trasportando** il risultato del prodotto sul punto P .

Poiché in tal modo ho invalidato soltanto l'apparizione della **conica** che si spezza nelle rette BA e CP , nei casi in cui A e P , o A e C , giacciono entrambi sulla retta s , dopo aver cancellato la conica costruita mediante la *macro* **Conica passante per quattro punti e tangente una retta in uno di essi – II**, ho ridefinito tale *macro* evidenziando nell'ordine B , s , A , C e P , come oggetti iniziali, e l'ultima conica disegnata come oggetto finale, e l'ho applicata nella figura in costruzione, evidenziando nell'ordine B , s , C , A e P , per invalidare l'apparizione della **conica** che si spezza nelle rette BC e AP , nei casi in cui C e P , o, A e C , giacciono entrambi sulla retta s .

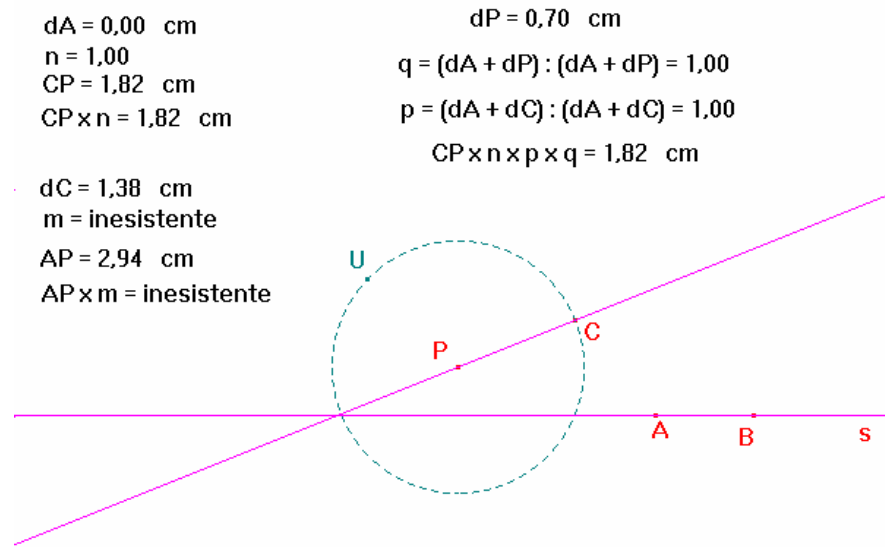


Figura 9

Analizzando la figura ottenuta ho osservato che, in realtà, per completarla occorre ancora determinare la conica che soddisfa le condizioni del problema, sia quando A , C e P sono allineati su una retta parallela a s , sia quando la retta passante per due dei punti A , C e P è parallela a s , e l'altro punto è il simmetrico di B rispetto al punto medio dei primi due¹⁶².

Pertanto, per determinare la prima delle coniche sopraindicate, dopo aver disposto A , C e P nella configurazione corrispondente, e aver **misurato** la distanza di A da C (fig. 10), ho **calcolato** le quantità $n_1 = d_A - d_C$, $n_2 = d_A - d_P$, e successivamente la quantità

$$n_3 = e^{\sqrt{-(|n_1|+|n_2|)}} = \begin{cases} 1 & \text{se } A, C \text{ e } P \text{ sono allineati su una retta parallela a } s \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases} \text{ e il suo prodotto}$$

per la lunghezza di AC . **Trasportando** il risultato ottenuto sul punto C , ho poi individuato un punto J , che appare solo se A , C e P sono allineati su una retta parallela a s , pertanto, determinato il **punto d'intersezione** A'' , del **cerchio** di centro C passante per J con la retta PC , ho disegnato la **conica** passante per i punti B , C , P , A'' e per il **punto d'intersezione** P' , della retta s con la **retta perpendicolare** a s , passante per A'' , che si spezza nelle rette s e CP , e appare solo nella configurazione considerata.

¹⁶² In tali casi la costruzione eseguita non dà luogo ad alcuna conica in quanto d e d_2 coincidono con uno dei punti iniziali.

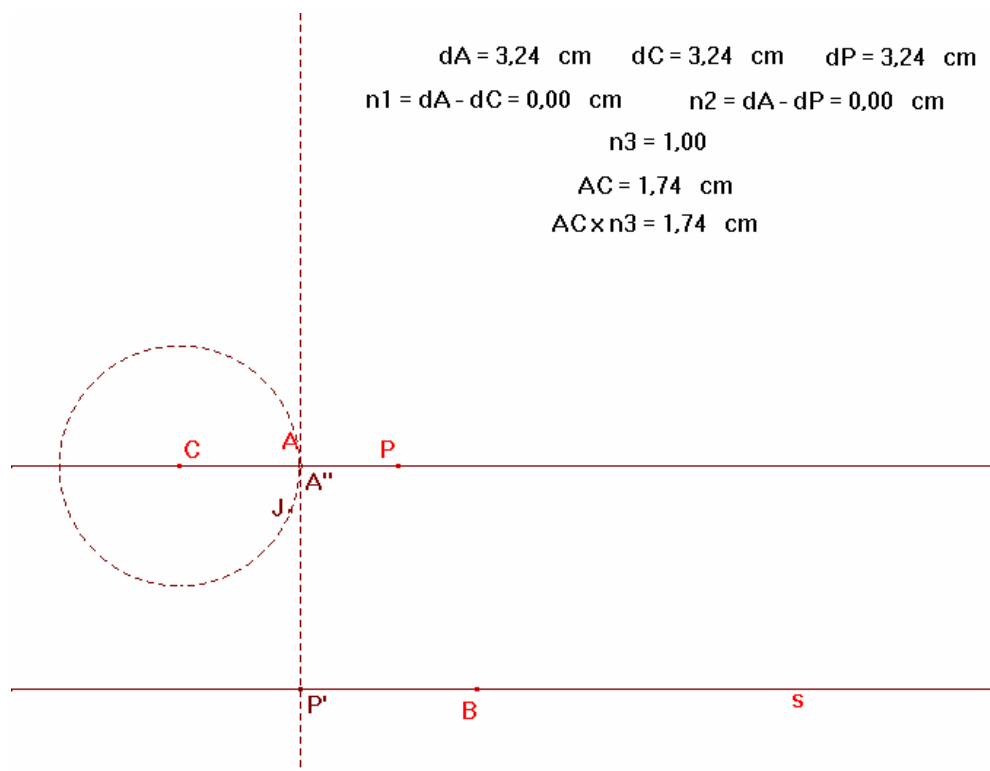


Figura 10

Infine, per determinare la conica che soddisfa le condizioni del problema quando la retta AP è parallela a s , e il punto C coincide con il simmetrico di B rispetto al punto medio M di A e P ¹⁶³ (fig. 11), dopo aver condotto dal punto A la **retta parallela** b , alla retta CB , che è una tangente della conica, ho disegnato il **punto d'intersezione** G , della **retta** PB con la retta b . Successivamente, **misurata** la lunghezza dei **segmenti** AG , PG , BG e CM , dal momento che detti X e Y i punti della conica che giacciono sulla retta per M parallela a PB , si ha che $AG^2 : PG \times BG = CM \times MB : XM \times MY$ ¹⁶⁴, ho calcolato la quantità $XM (= MY) = \sqrt{\frac{PG \times BG \times CM \times MB}{AG^2}}$, e, **trasportandola** su M , ho poi determinato il punto X (sulla **retta** per M parallela a PB), che giace sulla conica.

¹⁶³ M è il centro della conica.

¹⁶⁴ Nota 155.

Per far sì che la conica passante per B , P , A , C e X , venga visualizzata solo nel caso in considerazione, dopo aver determinato il simmetrico P' , di P rispetto a M , e aver **misurato** la distanza $d_{AP'}$, di A da P' , ho **calcolato** le quantità:

$$k = e^{\sqrt{-d_{AP'}}} = \begin{cases} 1 & \text{se } A \text{ coincide con } P' \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$h = e^{\sqrt{-|d_A - d_P|}} = \begin{cases} 1 & \text{se } AP \text{ è parallela a } s \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases},$$

e in seguito ne ho **calcolato** il prodotto per la lunghezza di XM . **Trasportando** il risultato ottenuto sul punto M , ho poi individuato un punto K , che appare solo se A coincide con P' , pertanto, **ridefinito** X , come **punto d'intersezione** del **cerchio** di centro M passante per K con la retta per M parallela a PB , ho disegnato la **conica** passante per i punti B , P , A , C e X , che appare solo nel caso analizzato.

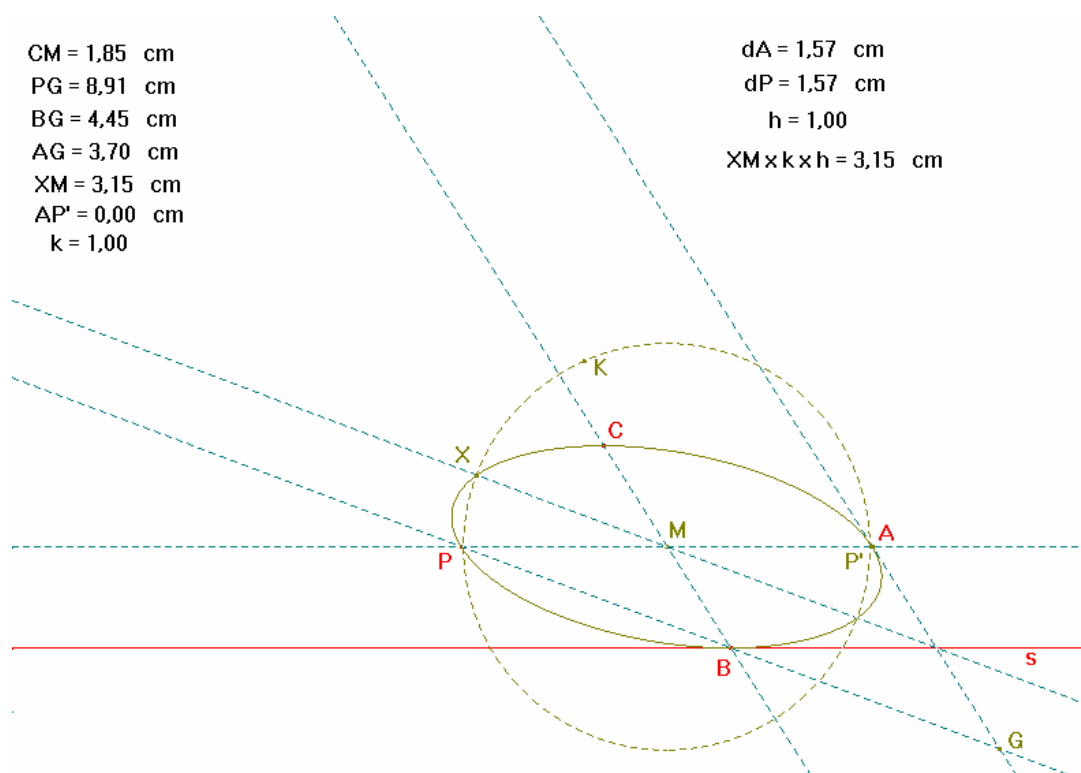


Figura 11

Per non ripetere la costruzione negli altri due casi in cui si presenta la stessa configurazione, ho poi definito la *macro* **Conica passante per quattro punti e tangente una retta in uno di essi – III**, evidenziando nell'ordine B, s, A, C e P , come oggetti iniziali, e la conica disegnata come oggetto finale, e l'ho applicata nella figura in costruzione, evidenziando nell'ordine B, s, C, A e P (fig. 12), e, B, s, P, A e C

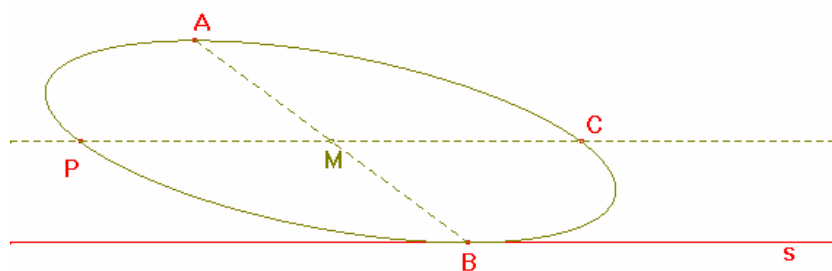


Figura 12

Dal momento che la figura interattiva ottenuta è ora corretta e completa, dopo aver **nascosto** tutti gli elementi della costruzione, eccetto la conica e i punti e la retta iniziali, ho cambiato i nomi dei punti iniziali ($B \rightarrow A, C \rightarrow C, P \rightarrow B, A \rightarrow D$) e ho inserito in essa una casella di testo in cui è indicato quali sono gli oggetti mobili e come possono essere spostati (fig. 13).

Infine, dal momento che, mediante il corollario 2 della proposizione VI, Newton riconduce il Problema LXI al problema esaminato, ho creato la *macro* **Conica passante per quattro punti e tangente una retta in uno di essi**, evidenziando i punti A, B, C e D , e la retta per A , come oggetti iniziali, e le dieci coniche determinate come oggetti finali¹⁶⁵.

¹⁶⁵ Affinché la *macro* funzioni correttamente occorre evidenziare come primo punto, il punto per cui passa la retta tangente alla conica.

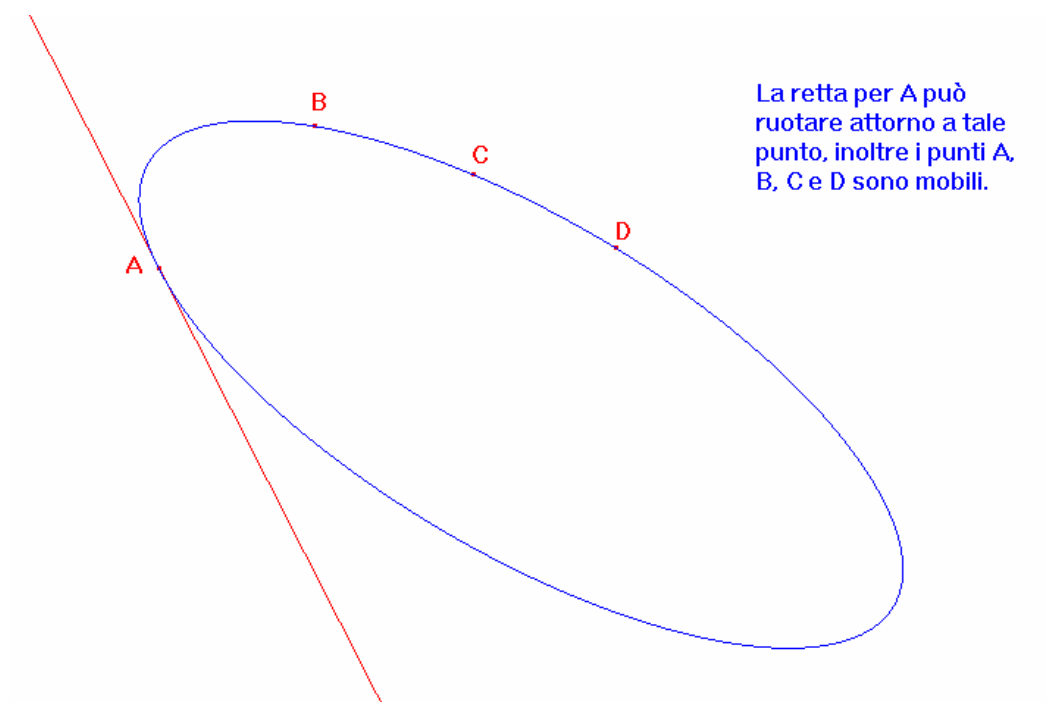


Figura 13

1.11 Problema LXI

Descrivere una sezione conica che passi per quattro punti dati, e che in uno di questi punti tocchi una linea retta data di posizione.

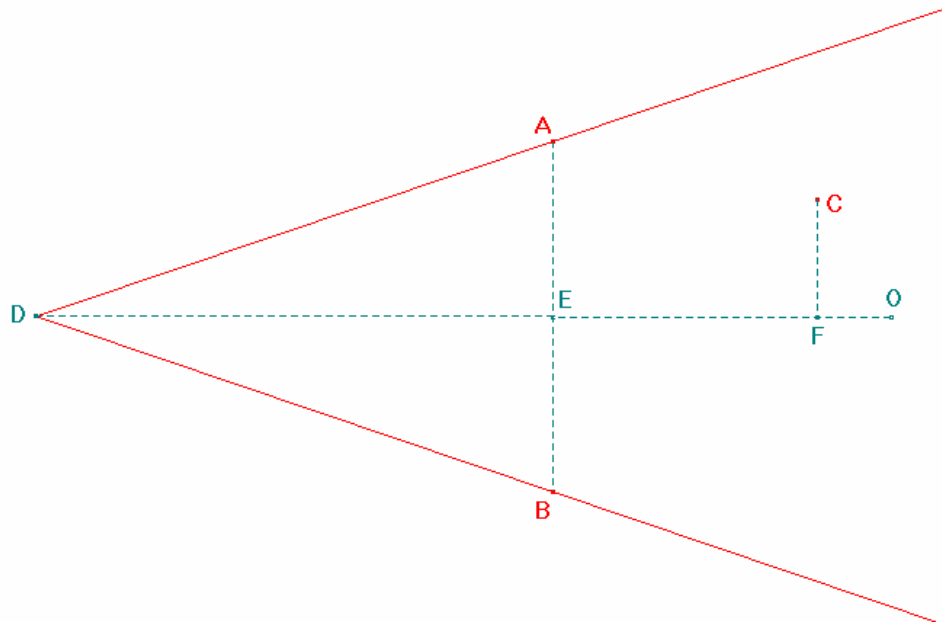


Figura 4

Per risolvere il problema, Newton individua un vertice V della conica, e il suo centro O , affermando che in tal modo la conica è determinata.

Come per il Problema LX¹⁶⁶, ho realizzato il disegno interattivo relativo al problema in esame facendo riferimento alla costruzione indicata dallo stesso Newton in uno dei corollari della proposizione VI, del *Solutio Problematis Veterum de Loco Solido*¹⁶⁷.

Più precisamente, facendo riferimento alla costruzione descritta nel corollario 1¹⁶⁸, egli afferma che dati i punti B , C e P , le rette BA e CA non devono più essere disegnate, il punto A deve coincidere con il punto C , AB con CB , e AC con la tangente in C , quindi PR deve

¹⁶⁶ Paragrafo 1.10.

¹⁶⁷ In tale proposizione mostra come costruire una conica di cui sono dati cinque punti A , B , C , D e P , nel corollario 1 spiega come riadattare la costruzione nel caso in cui alla conoscenza del punto D , si sostituisce la conoscenza della tangente Bt , nel punto dato B , e nel corollario 2 mostra come riadattare ulteriormente la costruzione nel caso in cui alla conoscenza dei punti A e D , si sostituisce la conoscenza delle tangenti nei punti dati B e C .

¹⁶⁸ Paragrafo 1.10, fig. 3.

essere parallelo a tale tangente, e PT deve esserlo a CB , mentre il resto della costruzione è lo stesso che nel corollario 1.

Per eseguire tale costruzione con *CABRI*, dopo aver disegnato tre **punti** B , C e P (fig. 2), e due **rette** r e s , passanti rispettivamente per B e C , ho disegnato la **retta** CB , e le **rette parallele** h e g , rispettivamente a s e CB , passanti per P . Disegnati poi, i **punti d'intersezione** R , di CB con h , e T , di r con g , ho determinato i **punti d'intersezione** r_2 , della retta h con la **retta parallela** a r , passante per C , e t_2 , della retta g con la **retta parallela** al segmento RT , passante per r_2 . E infine, dopo aver determinato il **punto d'intersezione** d , della **retta** Bt_2 con la **retta** Cr_2 , ho determinato la conica cercata applicando la *macro* **Conica passante per quattro punti e tangente una retta in uno di essi**, ai punti B , P , C e d , e alla retta per r .

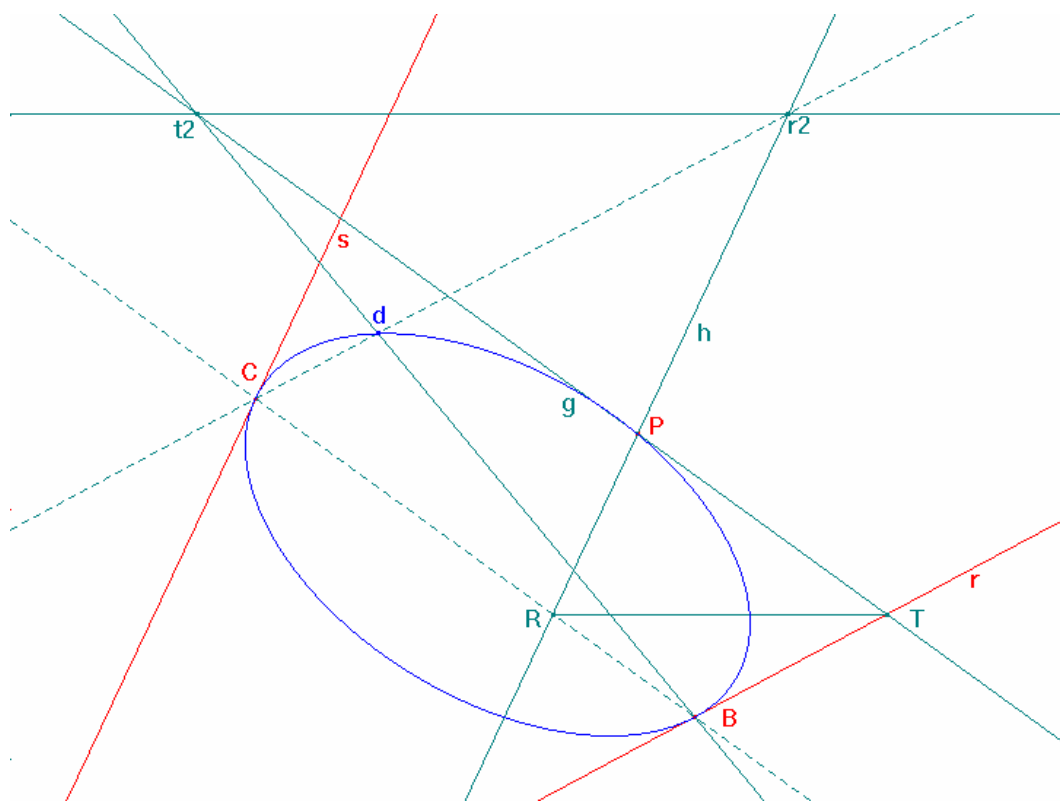


Figura 2

Analizzando la figura costruita per stabilirne il corretto funzionamento ho tuttavia appurato che, sebbene corretta, essa è ancora incompleta, in quanto, nel caso in cui la retta s è

parallela alla retta r ¹⁶⁹, e nel caso in cui P giace su r , o su s , non appare alcuna conica. Per completare la costruzione ho allora analizzato ciascun caso separatamente, disponendo i punti e le rette che costituiscono i dati iniziali nelle configurazioni corrispondenti.

In particolare, dopo aver disposto s in modo che fosse parallela a r (fig. 3), osservato che in tale configurazione il **punto medio** M , di B e C , è il centro della conica cercata, ho **misurato** la lunghezza del **segmento** BM , e le distanze Cd , di C da d , d_{Cr} , di C da r , e d_{Bs} , di B da s . **Calcolate** poi le quantità:

$$n = e^{\sqrt{-Cd}} = \begin{cases} 1 & \text{se } C \text{ coincide con } d \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$m = e^{\sqrt{-|d_{Cr} - d_{Bs}|}} = \begin{cases} 1 & \text{se } r \text{ è parallela a } s \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e successivamente il loro prodotto per la lunghezza di BM , ho **trasportato** il risultato ottenuto sul punto B , individuando un punto K , che appare solo nella configurazione considerata. Pertanto, determinato il **punto d'intersezione** M' , del **cerchio** di centro B passante per K con la **retta** MB , ho individuato il **simmetrico** P' , di P rispetto a M' , e con la **macro Conica passante per quattro punti e tangente una retta in uno di essi**, applicata evidenziando nell'ordine B, P, P', C e r , ho determinato la conica che soddisfa le condizioni del problema in tale configurazione.

¹⁶⁹ In tal caso il punto C coincide con d .

$BM = 2,22 \text{ cm}$
 $dC = 0,00 \text{ cm}$
 $dCr = 4,32 \text{ cm}$
 $dBs = 4,32 \text{ cm}$
 $n = 1,00$
 $m = 1,00$
 $BM \times n \times m = 2,22 \text{ cm}$

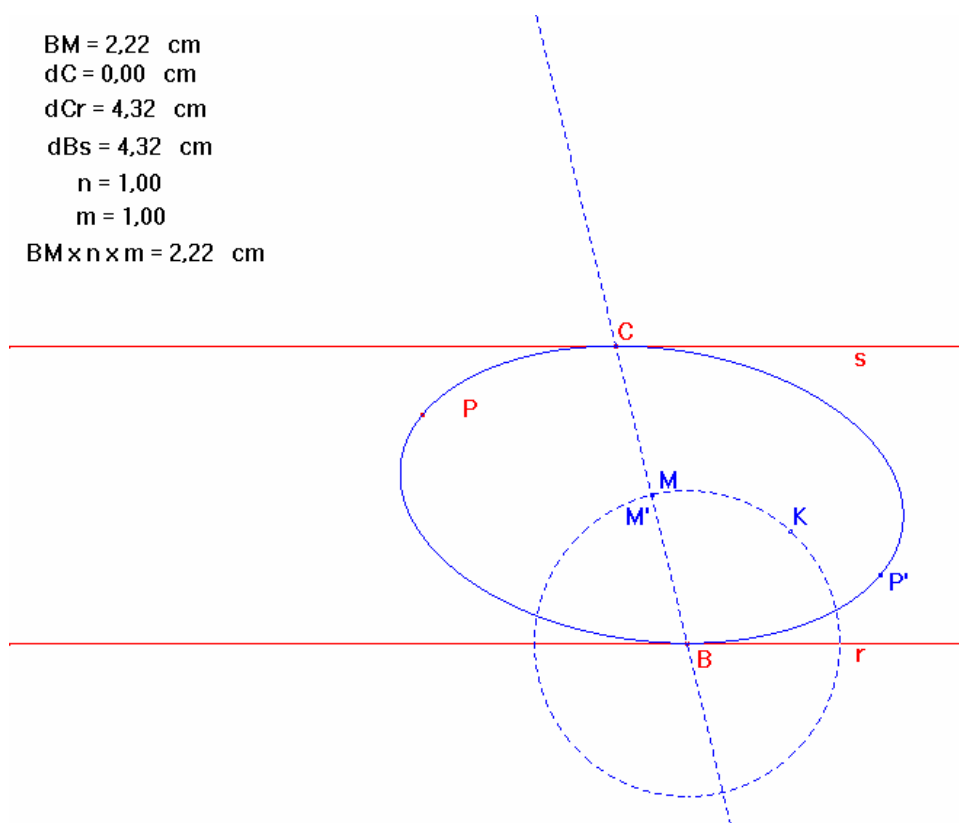


Figura 3

Invece per disegnare la conica che risolve il problema nel caso in cui r e s sono parallele e il punto P giace su r , o su s , dopo aver **misurato** la lunghezza del **segmento** PB (fig. 4), e la distanza d_{Pr} , di P da r , ho **calcolato** la quantità

$$p = e^{\sqrt{-|d_{Cr}-d_{Bs}|}} \cdot e^{\sqrt{-d_{Pr}}} = \begin{cases} 1 & \text{se } r \text{ è parallela a } s, \text{ e } P \text{ giace su } r \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{e successivamente il suo}$$

prodotto per la lunghezza di PB . **Trasportando** il risultato ottenuto sul punto B , ho poi individuato un punto U , che appare solo nella configurazione in esame, pertanto, determinato il **punto d'intersezione** P'' , del **cerchio** di centro B passante per U con la retta r , ho disegnato il **punto d'intersezione** C' , della retta s , con la retta perpendicolare a r , passante per P'' , e, con la *macro* **Conica passante per quattro punti e tangente una retta in uno di essi**, ho determinato la conica tangente a r , passante per i punti B , P , C , e C' , che si spezza nelle rette r e s , e appare solo se r è parallela a s , e il punto P giace su r .

Per non ripetere la costruzione del caso in cui r è parallela a s , e P giace su s , ho poi definito la *macro* **Conica passante per tre punti e tangente due rette in due di essi – I**, evidenziando nell'ordine B , r , C , s e P , come oggetti iniziali, e la conica disegnata come oggetto finale, e l'ho applicata nella figura in costruzione, evidenziando nell'ordine C , s , B , r e P (fig. 5).

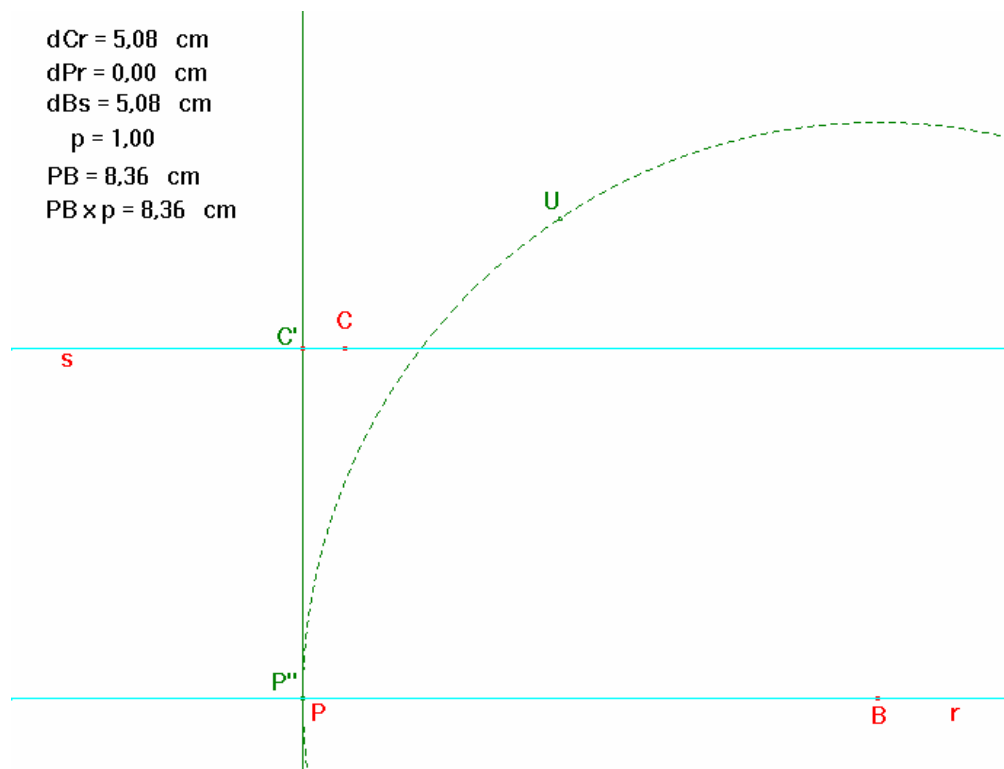


Figura 4

$dCr = 3,22 \text{ cm}$
 $dPr = 3,22 \text{ cm}$
 $dBs = 3,22 \text{ cm}$
 $p = \text{inesistente}$
 $PB = 8,76 \text{ cm}$
 $PB \times p = \text{inesistente}$

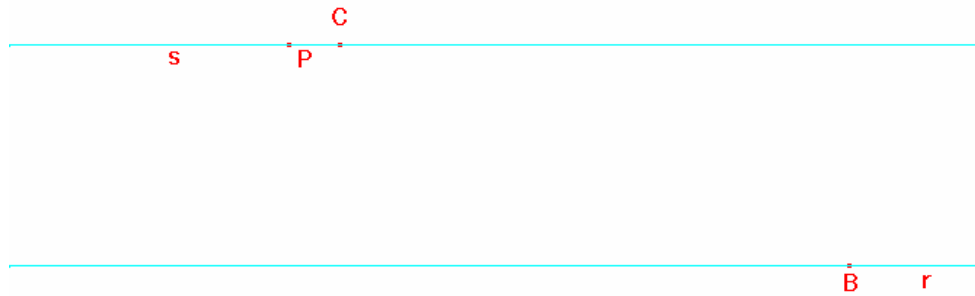


Figura 5

Infine, per determinare la conica che appare quando r e s sono incidenti, e il punto P giace su r , o su s , dopo aver determinato il **punto d'intersezione** J (fig. 6), di r e s , e aver **misurato** la lunghezza del **segmento** PJ , ho **calcolato** la quantità

$$z = e^{\sqrt{-d_{Pr}}} = \begin{cases} 1 & \text{se } P \text{ giace su } r \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{e successivamente il suo prodotto per la}$$

lunghezza di PJ . **Trasportando** il risultato ottenuto sul punto J , ho poi individuato un punto Q , che appare solo nella configurazione in analisi, pertanto, determinato i **punti d'intersezione** P' e C' , del **cerchio** di centro J passante per Q , rispettivamente con la retta r e con la retta s , ho disegnato la **conica** passante per i punti P' , C' , B , C e J , che si spezza nelle rette r e s , e appare solo se r e s sono incidenti e il punto P giace su r .

Per non ripetere la costruzione del caso in cui P giace su s , ho definito la *macro* **Conica passante per tre punti e tangente due rette in due di essi – II**, evidenziando nell'ordine B , r , C , s e P , come oggetti iniziali, e la conica disegnata come oggetto finale, e l'ho applicata nella figura in costruzione, evidenziando nell'ordine C , s , B , r e P (fig. 7).

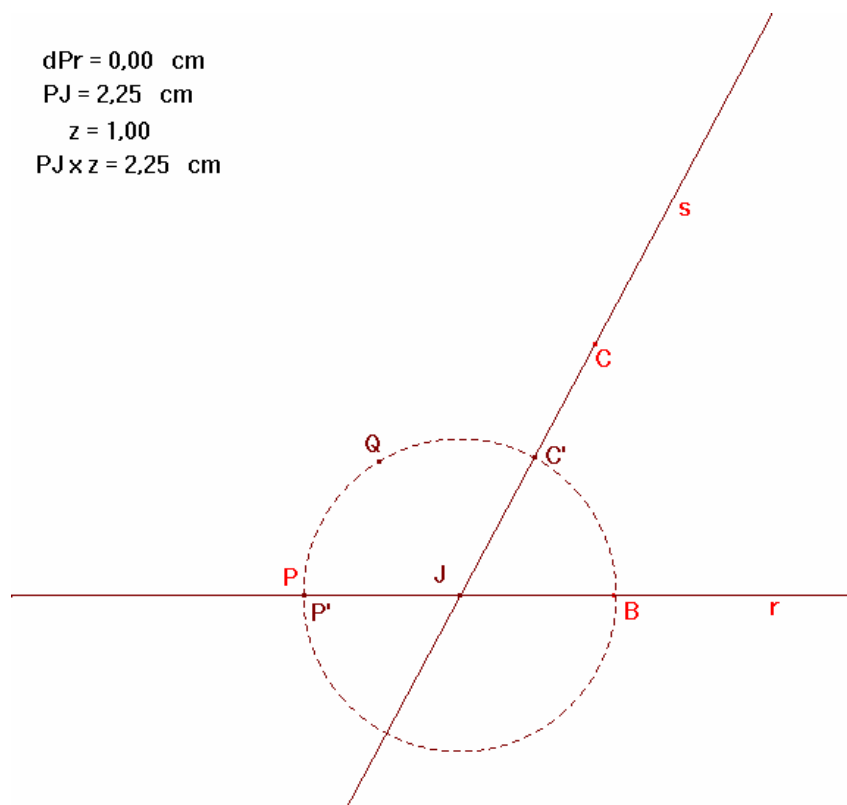


Figura 6

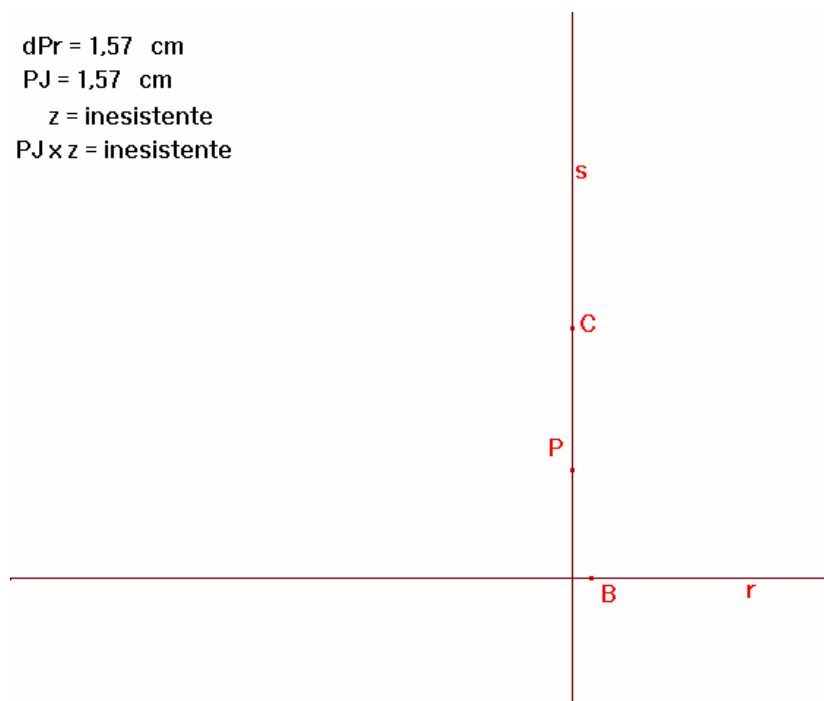


Figura 7

Analizzando ancora la figura ottenuta, ho poi osservato che in realtà essa non è ancora completa, in quanto, in alcune configurazioni il punto d coincide con P , e dunque non appare nessuna conica. Per ovviare a tale inconveniente, dopo aver eseguito la costruzione indicata da Newton nella proposizione VI¹⁷⁰, che permette di determinare un ulteriore punto della conica cercata, ho dunque riapplicato la *macro* **Conica passante per quattro punti e tangente una retta in uno di essi**.

Più precisamente, dopo aver disegnato il **punto medio** O , di C e d (fig. 8), il **punto d'intersezione** t_3 , della **retta** BO con la retta h , la **retta parallela** al **segmento** RT passante per t_3 , e il **punto d'intersezione** r_3 , di tale retta con la retta g , ho disegnato il **punto d'intersezione** d_2 , della **retta** Cr_3 con la retta BO , che giace sulla conica, e, per far sì che la conica tangente r , e passante per B , P , C , e d_2 , venga visualizzata solo nel caso in considerazione, dopo aver **misurato** la lunghezza del **segmento** BO (fig. 9), e la distanza \overline{Pd} , di P da d , ho **calcolato** la quantità:

$$k = e^{\sqrt{-Pd}} = \begin{cases} 1 & \text{se } P \text{ coincide con } d \\ \text{inesistente} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e in seguito ne ho **calcolato** il prodotto per la lunghezza di BO . **Trasportando** il risultato ottenuto sul punto B , ho poi individuato un punto H , che appare solo se P coincide con d , pertanto, **ridefinito** O' , come **punto d'intersezione** del **cerchio** di centro B passante per H , con la retta BO , e d_2 , come **punto d'intersezione** della **retta** BO' , con la retta Cr_3 , ho applicato la *macro* **Conica passante per quattro punti e tangente una retta in uno di essi**, evidenziando nell'ordine C , s , P , B e d_2 .

¹⁷⁰ Paragrafo 1.10.

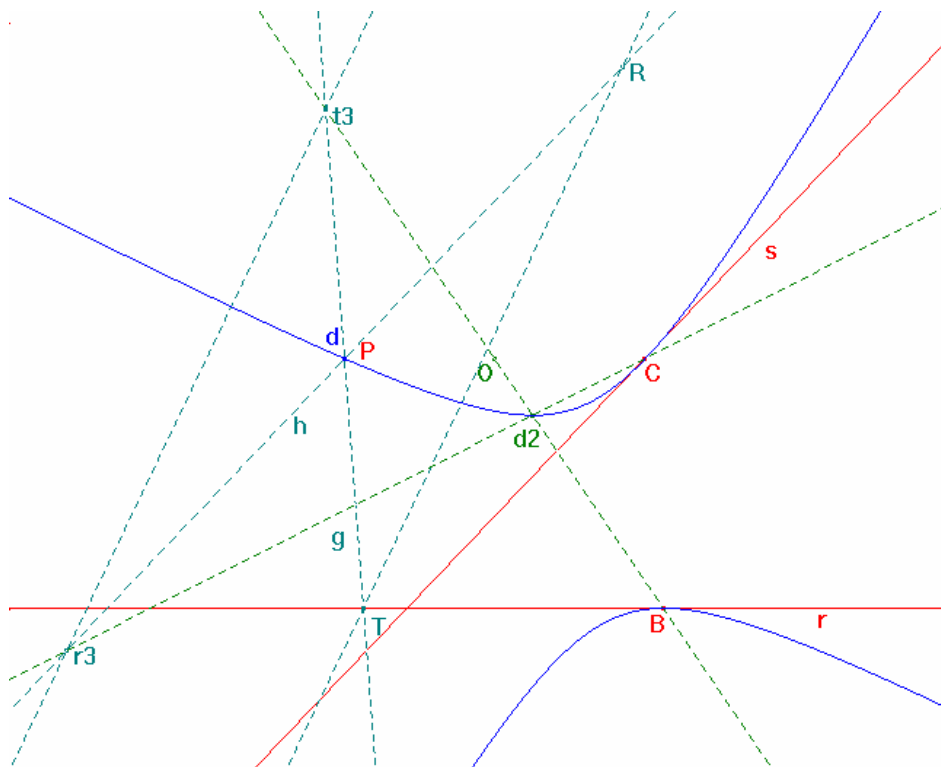


Figura 8

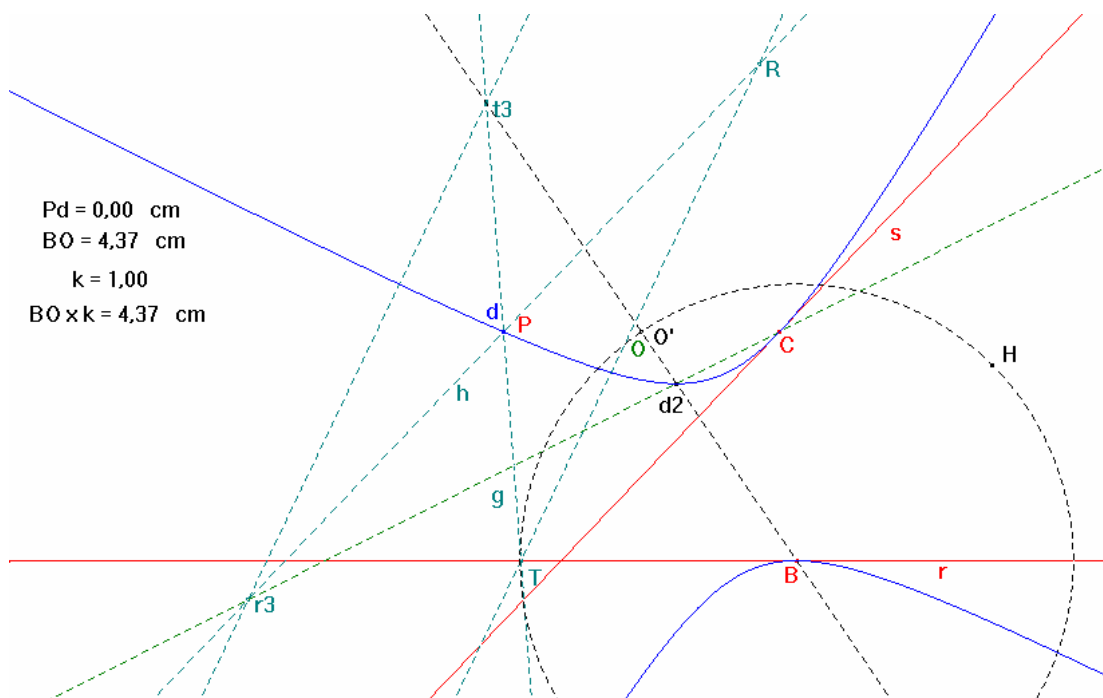


Figura 9

Poiché la figura costruita è ora completa, dopo aver cambiato i nomi dei punti iniziali ($B \rightarrow A$, $C \rightarrow B$, $P \rightarrow C$), ho inserito in essa una casella di testo in cui è indicato quali sono gli oggetti mobili e come possono essere spostati (fig. 10), ottenendo così un disegno interattivo che illustra esaurientemente il problema in esame.

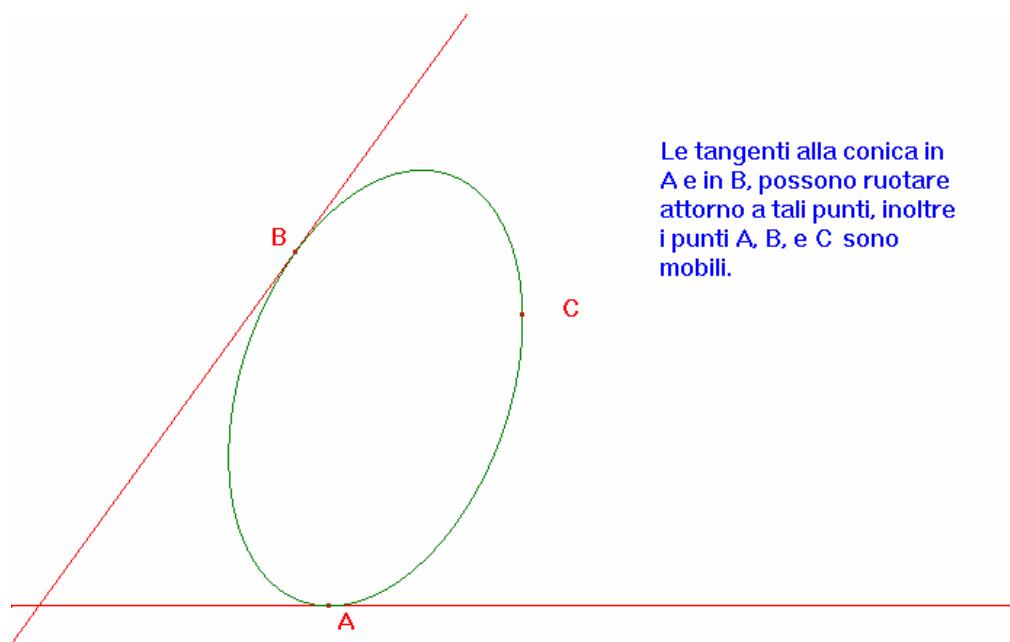


Figura 10

2

Costruzioni ottenute “calcolando” le soluzioni

Nel presente capitolo è descritta la costruzione delle immagini interattive costruite riportando in un opportuno sistema di riferimento, le radici dell'equazione risolvente calcolate con l'ausilio della calcolatrice interattiva presente in *CABRI*.

2.1 Problema XX

Condurre da un punto dato C , una retta CF , che formi con altre due rette date di posizione AE , AF , un triangolo AEF di grandezza data.

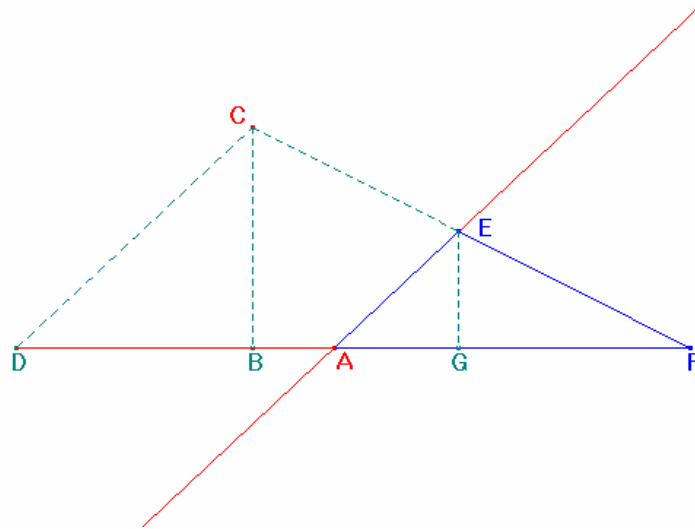


Figura 1

Posto, in accordo con i *DATI* di Euclide, $AD = a$, $CB = b$, e indicata con c^2 la superficie del triangolo AEF , Newton sceglie come incognita $AF = x$ (fig. 1), e riduce il problema all'equazione di secondo grado $x^2 - \frac{2c^2x}{b} - \frac{2ac^2}{b} = 0$ (\clubsuit).

Sebbene di tale equazione egli consideri la sola radice $x = \frac{c^2 + \sqrt{c^4 + 2abc^2}}{b}$, giungendo così alla determinazione di una sola soluzione del problema, in effetti, la scelta di AF come incognita fissa un sistema di coordinate cartesiane, avente origine nel punto A , in cui anche alla radice $x = \frac{c^2 - \sqrt{c^4 + 2abc^2}}{b}$, corrisponde una soluzione del problema¹⁷¹.

Considerare entrambe le radici dell'equazione (\clubsuit), non è tuttavia sufficiente a completare la risoluzione del problema, infatti, se il punto C appartiene al semipiano di origine AE , opposto a quello in cui si trova nella figura che correda la risoluzione di Newton (fig. 2),

¹⁷¹ *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. V, p. 197, nota 230.

l'equazione risolvante del problema non è più $x^2 - \frac{2c^2x}{b} - \frac{2ac^2}{b} = 0$, bensì

$$x^2 - \frac{2c^2x}{b} + \frac{2ac^2}{b} = 0^{172}.$$

Per determinare tutte le soluzioni del problema, indipendentemente dalla posizione del punto C rispetto alla retta AE , occorre dunque considerare entrambe le radici delle due equazioni risolventi. Inoltre, dal momento che la finalità della costruzione è di realizzare un disegno interattivo completo ma soprattutto corretto, per non dar luogo a errori o ambiguità, è necessario subordinare la costruzione delle soluzioni del problema, corrispondenti a ciascuna equazione, all'appartenenza di C a uno dei due semipiani di origine AE .

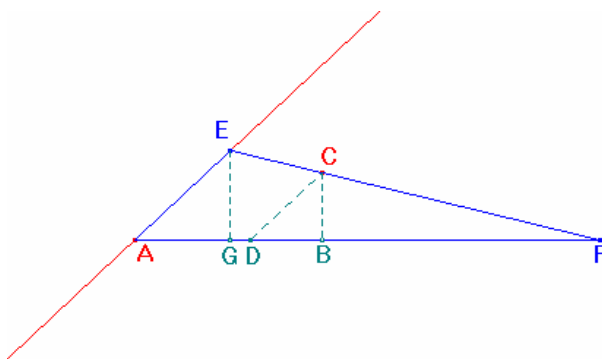


Figura 2

A tale scopo, dopo aver disegnato in un foglio di *CABRI*, un **punto** C , e due **rette** r e s , incidenti nel **punto** A (fig. 3), ho scelto di rappresentare l'area del triangolo AEF con l'area di un rettangolo, pertanto, dopo aver disegnato un **rettangolo** $QLRS$, di altezza unitaria h ¹⁷³, avente il vertice L , mobile sulla **semiretta** QL , ne ho misurato l'**area**¹⁷⁴.

¹⁷² Si ottiene sostituendo l'espressione $DF = AF - AD = x - a$, all'espressione $DF = AD + AF = a + x$, nel procedimento risolutivo di Newton (Paragrafo 5.6)

¹⁷³ Per definire l'altezza h del rettangolo, ho usato il comando *numero*.

¹⁷⁴ In realtà, avrei potuto rappresentare l'area di AEF con la lunghezza di un segmento, tuttavia, in tal modo, essa sarebbe apparsa con dimensioni lineari.

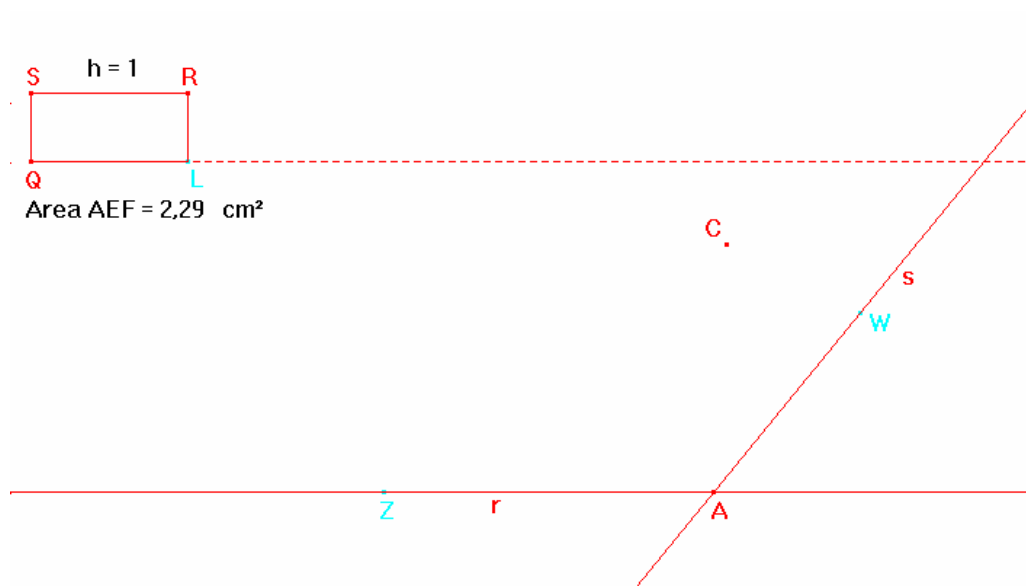


Figura 3

Fissato il **sistema di assi** cartesiani $AJxJy$ ¹⁷⁵ (fig. 4), ho poi determinato il **simmetrico** Jx' , di Jx rispetto al punto A, e, dal momento che in corrispondenza alle diverse posizioni di C rispetto alla retta s, le due equazioni risolventi permettono alternativamente di giungere alle soluzioni del problema, ho distinto i due casi spostando il punto C da parti opposte rispetto alla retta s, e disegnando due **punti D**, come intersezione della **retta parallela** alla retta s, passante per C, rispettivamente con la **semiretta** AJx' , ovvero con il semiasse negativo delle ascisse, e con la **semiretta** AJx , ovvero con il semiasse positivo delle ascisse (fig. 5).

¹⁷⁵ Per definirlo ho disegnato il cerchio di centro A e raggio unitario, trasportando h sul punto A, e poi ho determinato i punti di intersezione Jx e Jy , di tale cerchio con r e s. L'esigenza di definire l'unità di misura di tale sistema di assi uguale a 1, nasce del fatto che in esso verranno riportati i valori delle radici delle due equazioni risolventi del problema.

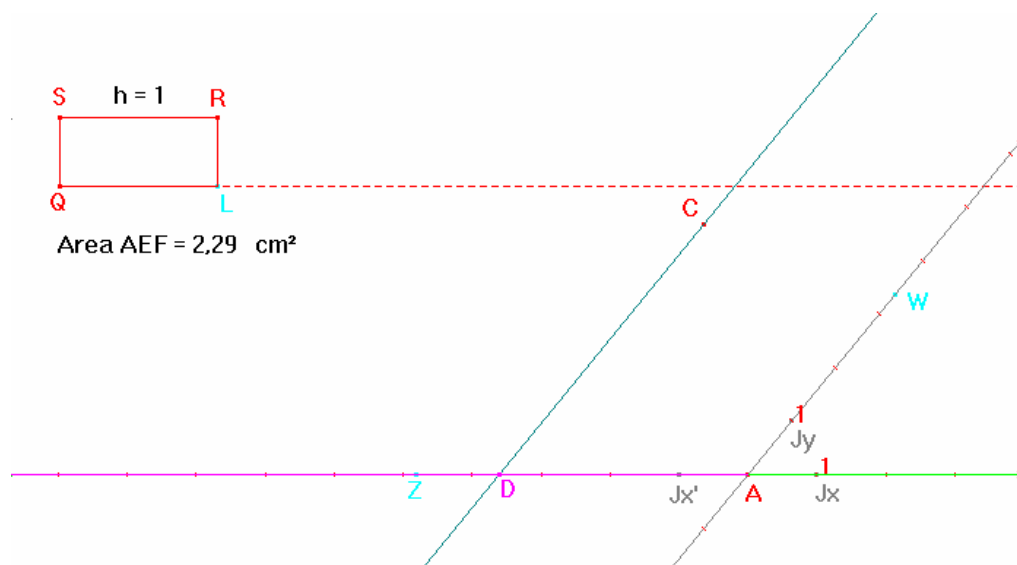


Figura 4

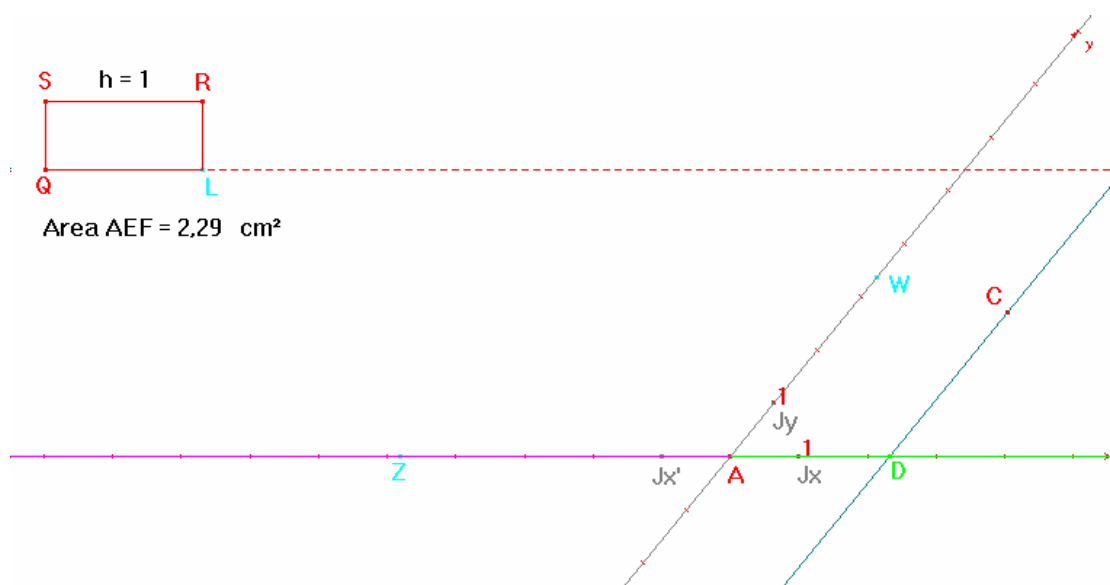


Figura 5

A questo punto, dopo aver determinato il **punto d'intersezione B**, di r con la **retta perpendicolare** a r , passante per C (fig. 6), ho **misurato**, in ambedue i casi, la lunghezza

dei **segmenti AD** e CB , e ho **calcolato** le quantità $x = \frac{c^2 + \sqrt{c^4 + 2abc^2}}{b}$ e

$$x_- = \frac{c^2 - \sqrt{c^4 - 2abc^2}}{b}, \text{ relative al secondo (fig. 7).}$$

Area AEF = 4,36 cm²

AD = 3,37 cm

CB = 2,46 cm

$x_c = 5,67$ cm

$y_c = -2,11$ cm

183

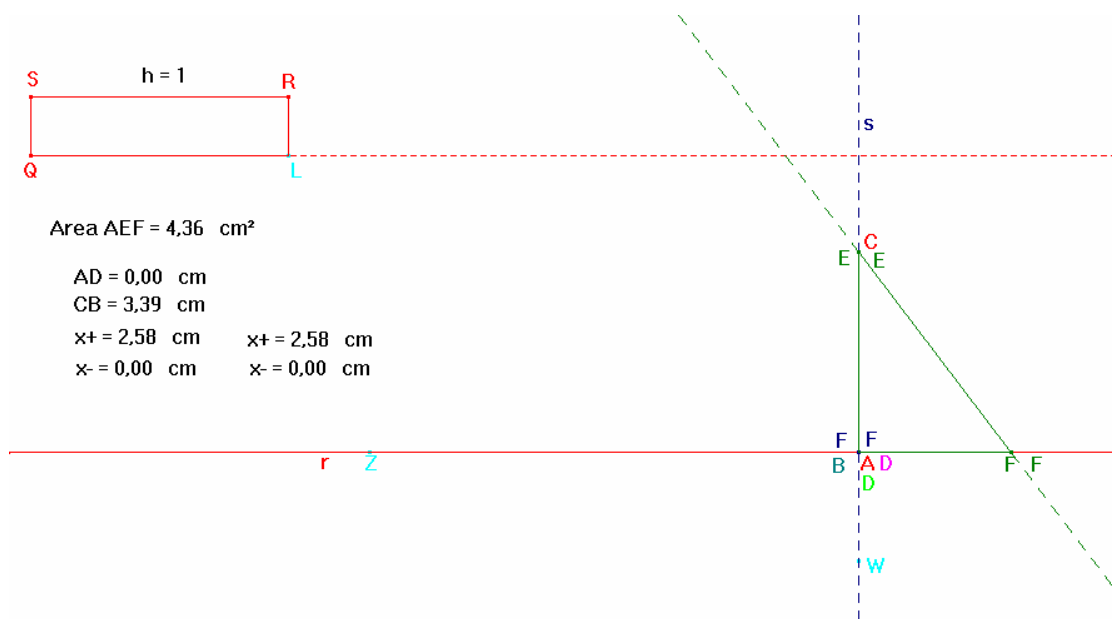


Figura 8

Trasportando i risultati ottenuti sull'asse delle ascisse del sistema AJ_xJ_y , ho poi ottenuto, nell'uno e nell'altro caso, due nuovi punti F , che compaiono solo se C non giace su s , e permettono quindi di individuare i due triangoli $EA F$ che soddisfano le condizioni del problema solo in tale eventualità.

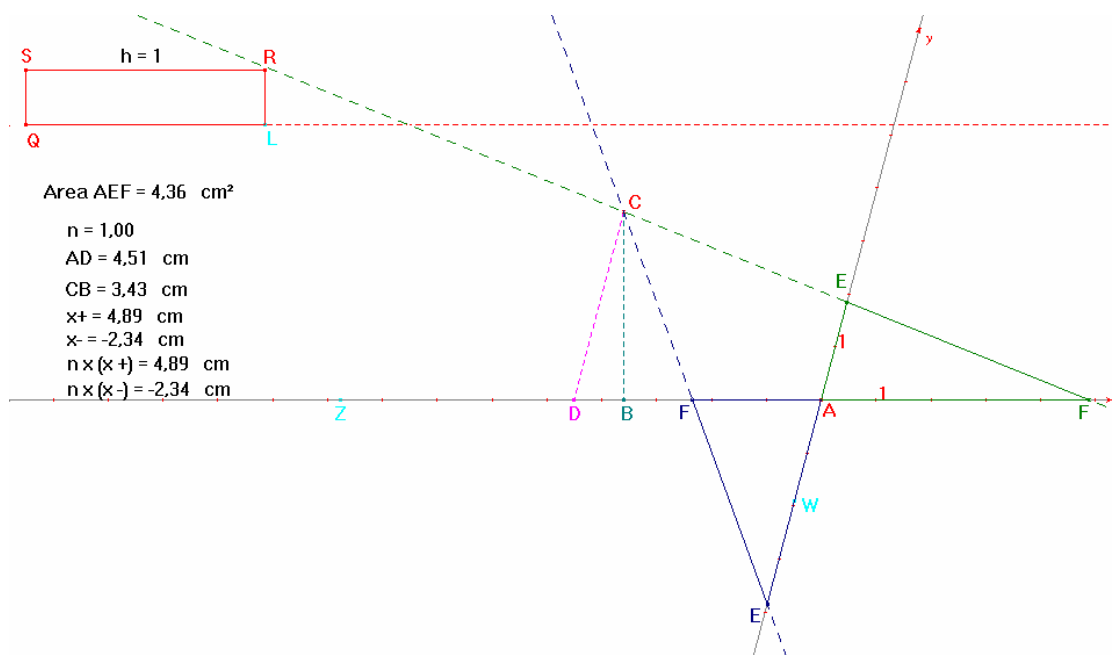


Figura 9

Per quanto riguarda il caso in cui il punto C giace sulla retta s , come già osservato, le due equazioni risolventi coincidono, inoltre il problema ammette una sola soluzione, in quanto, una delle radici corrispondenti è nulla e quindi non dà luogo ad alcuna soluzione.

Pertanto, per costruire l'unica soluzione esistente, e far sì che essa non dia luogo a errori nel caso in cui C non giaccia su s , ho **calcolato** la quantità

$$m = e^{\sqrt{-Cs}} = \begin{cases} 1 & \text{se } C \text{ giace su } s \\ \text{inesistente} & \text{se } C \text{ non giace su } s \end{cases} \quad \text{e l'ho moltiplicata per la radice non banale}$$

$$x = \frac{2 \cdot \text{Area } AEF}{CB} = \frac{2c^2}{b}, \text{ comune alle due equazioni risolventi (fig. 10).}$$

Trasportando il risultato ottenuto sull'asse delle ascisse del sistema $AJxJy$, ho poi ottenuto un punto F , che appare solo se C giace su s , e, dal momento che in tale configurazione il punto E coincide con C , ho disegnato il **triangolo** ACF , che soddisfa le condizioni del problema.

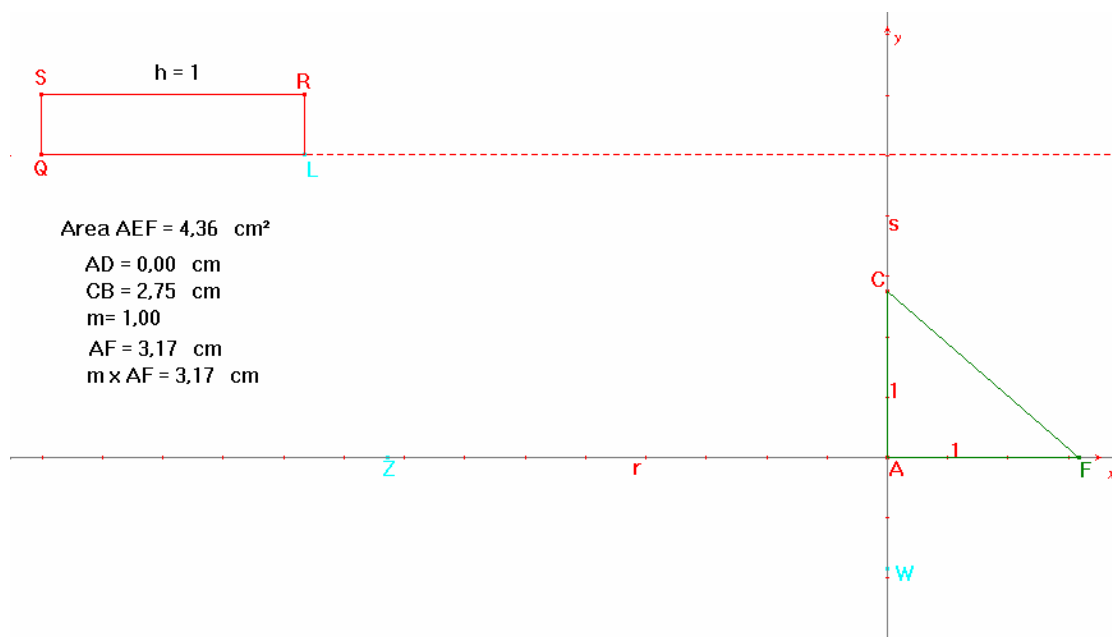


Figura 10

Per quanto riguarda invece, il caso in cui il punto C giace sulla retta r , sebbene il problema ammetta anche in tal caso un'unica soluzione, l'annullarsi di CB rende impossibili entrambe le equazioni risolventi. Tuttavia, poiché ciò è dovuto soltanto al ruolo attribuito alle rette r e s , per aggirare l'ostacolo è sufficiente ripetere la costruzione precedente scambiando tale ruolo. A tale scopo, dal momento che in tale configurazione il punto D coincide con C (fig. 11), ho misurato la distanza CA , e, dopo aver **calcolato** la quantità

$$m' = e^{\sqrt{-Cr}} = \begin{cases} 1 & \text{se } C \text{ giace su } r \\ \text{inesistente} & \text{se } C \text{ non giace su } r \end{cases}, \text{ l'ho moltiplicata per la radice non banale}$$

$$x = \frac{2 \cdot \text{Area } AEF}{CA} = \frac{2c^2}{a}, \text{ comune alle due equazioni risolventi, che si ottengono}$$

ripercorrendo la risoluzione del problema dopo aver scambiato il ruolo di r e s .

Trasportando il risultato ottenuto sull'asse delle ascisse del sistema $AJxJy$, ho poi ottenuto un punto F , che appare solo se C giace su r , e, dal momento che in tale configurazione il punto E coincide con C , ho disegnato il **triangolo** ACF , che soddisfa le condizioni del problema.

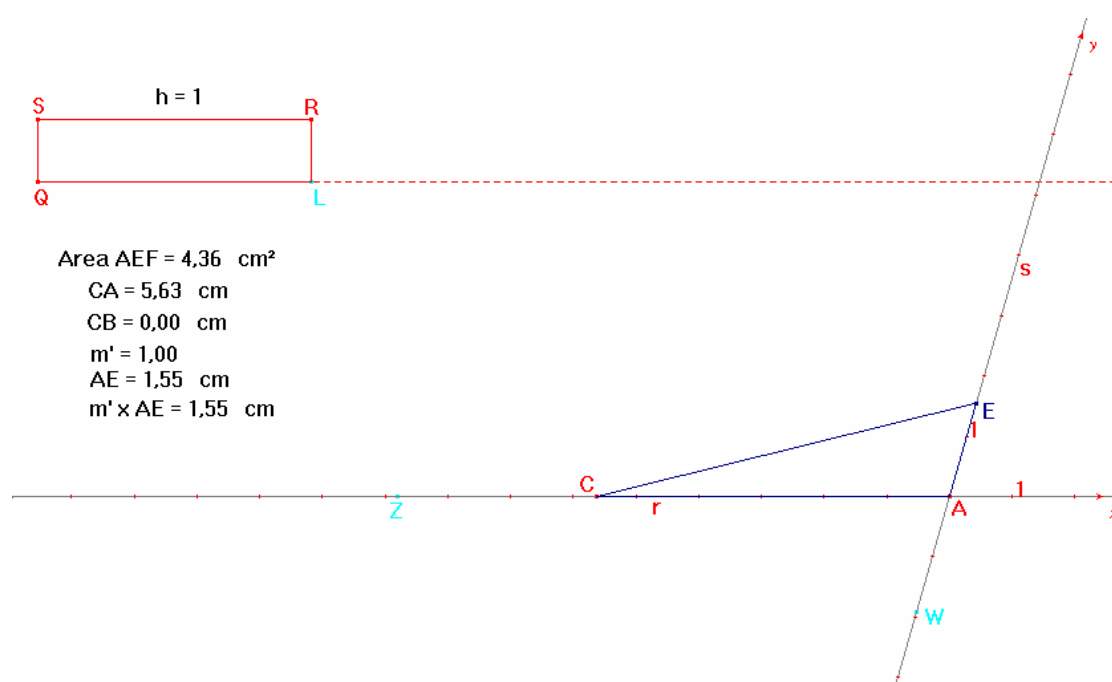


Figura 11

La figura costruita è ora completa, in quanto in essa compaiono tutte le soluzioni del problema in ogni configurazione. Tuttavia, per maggior chiarezza, ho inserito in essa una casella di testo, ove è indicato quali sono gli oggetti mobili e come possono essere spostati (fig. 12).

2.2 Problema XXII

Date di posizione tre rette, AD, AE, BF, condurne una quarta, DF, in modo che le sue parti DE, EF, intercettate dalle prime rette, siano di lunghezza data.

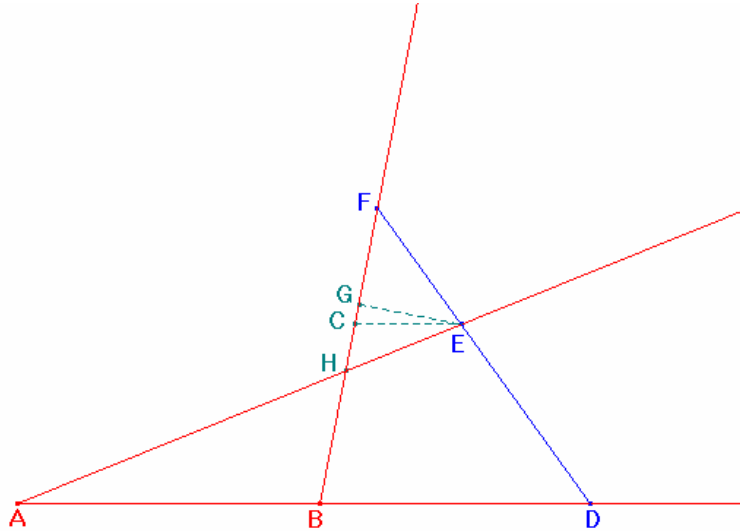


Figura 1

Dopo aver disegnato EG perpendicolare a BF , e CE parallela ad AD , Newton sceglie come incognita $HE = x$, e, posto in accordo con i *DATI* di Euclide, $AB = a$, $BH = b$, $AH = c$, $ED = d$ e $EF = e$, riduce il problema all'equazione di secondo grado $x^2 = 2qx + r^2$ ¹⁷⁶, di cui scrive entrambe le soluzioni $x = q \pm \sqrt{q^2 + r^2}$.

La scelta di HE come incognita fissa un sistema di coordinate cartesiane, avente origine nel punto H , in cui riportando entrambe le radici dell'equazione si determinano i due punti che possono assumere il ruolo del punto E . Tali punti consentono di determinare le due rette che soddisfano le condizioni del problema, in quanto, come lo stesso Newton afferma, condotte per essi le rette parallele ad AD , e individuati così i due corrispettivi punti C sulla retta AE , mediante la proporzione $d : e = BC : FC$ è possibile determinare i due punti F corrispondenti, e quindi risolvere il problema congiungendoli ai rispettivi punti E .

¹⁷⁶ Dove per brevità ha posto $m = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{b} - \frac{eb}{d}$, $p = \frac{a^2 d}{eb} - m$, $q = \frac{mc - \frac{ebc}{d}}{2p}$ e $r^2 = \frac{-\frac{ebc^2}{d} + \frac{e^2 dc^2}{eb}}{p}$.

Sebbene quando il punto H si trovi nel semipiano di origine AD , opposto a quello in cui appare nella figura che corredda la risoluzione di Newton (fig. 2), l'equazione risolvente del problema non sia più $x^2 = 2qx + r^2$, ma $x^2 = -2qx + r^2$ ¹⁷⁷, dal momento che le due equazioni hanno radici opposte¹⁷⁸, per passare dall'uno all'altro caso è sufficiente cambiare l'orientamento dell'asse delle ascisse.

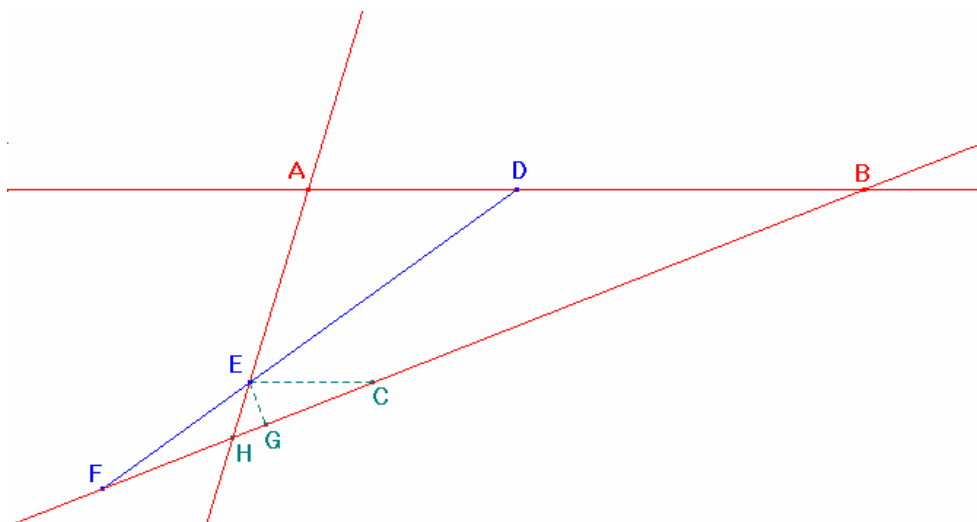


Figura 2

Segue l'elenco delle operazioni eseguite con *CABRI*, per realizzare il disegno interattivo relativo al problema in esame:

<i>Comando utilizzato</i>	<i>Specificazione</i>	<i>Oggetto costruito</i>	<i>Note</i>
Retta	Per A	Retta r	Rappresenta la retta AD (fig. 3)
Retta	Per A	Retta s	Rappresenta la retta AE
Punto su un oggetto	Sulla retta r	Punto B	

¹⁷⁷ Si ottiene sostituendo le espressioni $BC = BH - HC = \frac{bc - bx}{c}$ e $CG = -\frac{HE^2 - EC^2}{2CH} + \frac{1}{2}CH$, alle espressioni $BC = BH + HC = \frac{bc + bx}{c}$ e $CG = \frac{HE^2 - EC^2}{2CH} - \frac{1}{2}CH$, nel procedimento risolutivo di Newton (Paragrafo 5.8).

¹⁷⁸ Ciò è dovuto al fatto che esse differiscono solo per il segno del coefficiente del termine di primo grado.

Retta	Per B	Retta t	Rappresenta la retta BF
Semiretta	Di origine Q	Semiretta q	
Semiretta	Di origine R	Semiretta q'	
Punto su un oggetto	Sulla semiretta q	Punto T	Il punto T è mobile sulla semiretta q
Punto su un oggetto	Sulla semiretta q'	Punto S	Il punto S è mobile sulla semiretta q'
Segmento		Segmento QT	
Segmento		Segmento RS	
Distanza e lunghezza	Del segmento QT		Rappresenta il valore di d , ossia la lunghezza di ED
Distanza e lunghezza	Del segmento RS		Rappresenta il valore di e , ossia la lunghezza di EF
Intersezione di due oggetti	Della retta s con la retta t	Punto H	
Numero		Numero 1	Rappresenta l'unità di misura del sistema di assi in cui verranno riportate le radici dell'equazione risolvente
Trasporto di misura	Del numero 1 sul punto H	Punto U	
Circonferenza	Di centro A passante per U	Circonferenza γ	
Simmetria centrale	Simmetrico del punto A rispetto al punto H	Punto A'	
Semiretta	Di origine H passante per A'	Semiretta HA'	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza γ con la semiretta HA'	Punto Jx	
Semiretta	Di origine H passante per A'	Semiretta HA'	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza γ con la semiretta HA'	Punto Jx	
Semiretta	Di origine H passante per A'	Semiretta HA'	

Intersezione di due oggetti	Della circonferenza γ con la semiretta HA'	Punto Jx	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza γ con la retta t	Punto Jy	
Nuovi assi	Di origine H , e assi HJx e HJy	Sistema di assi $HJxJy$	Poiché il punto Jx giace sulla semiretta HA' , lo spostamento del punto H , da un semipiano di origine r , al suo opposto, fa cambiare l'orientamento dell'asse delle ascisse.
Segmento		Segmento AB	
Segmento		Segmento BH	
Segmento		Segmento AH	
Distanza e lunghezza	Del segmento AB		Rappresenta il valore di a
Distanza e lunghezza	Del segmento BH		Rappresenta il valore di b
Distanza e lunghezza	Del segmento AH		Rappresenta il valore di c
Calcolatrice	Calcolo del valore dell'espressione $\frac{c^2 - a^2 - b^2}{b} - \frac{eb}{d}$		Rappresenta il valore di m
Calcolatrice	Calcolo del valore dell'espressione $\frac{a^2 d}{eb} - m$		Rappresenta il valore di p
Calcolatrice	Calcolo del valore dell'espressione $\frac{mc - \frac{ebc}{d}}{2p}$		Rappresenta il valore di q
Calcolatrice	Calcolo del valore dell'espressione $\frac{-\frac{ebc^2}{d} + \frac{e^2 dc^2}{eb}}{p}$		Rappresenta il valore di r^2

Calcolatrice	Calcolo del valore dell'espressione $x = q + \sqrt{q^2 + r^2}$	$x +$	Rappresenta il valore di una delle radici
Calcolatrice	Calcolo del valore dell'espressione $x = q - \sqrt{q^2 + r^2}$	$x -$	Rappresenta il valore di una delle radici
Trasporto di misura	Del valore di $x +$ sull'asse delle ascisse del sistema $HJxJy$	Punto E	
Trasporto di misura	Del valore di $x -$ sull'asse delle ascisse del sistema $HJxJy$	Punto E'	
Retta parallela	Alla retta r passante per E	Retta g	(fig. 4)
Retta parallela	Alla retta r passante per E'	Retta h	
Intersezione di due oggetti	Della retta g con la retta t	Punto C	
Intersezione di due oggetti	Della retta h con la retta t	Punto C'	
Segmento		Segmento BC	
Segmento		Segmento BC'	
Distanza e lunghezza	Del segmento BC		
Distanza e lunghezza	Del segmento BC'		
Calcolatrice	Calcolo del valore dell'espressione $\frac{\overline{BC} \cdot e}{d}$		Rappresenta la misura di FC
Calcolatrice	Calcolo del valore dell'espressione $\frac{\overline{BC'} \cdot e}{d}$		Rappresenta la misura di $F'C'$
Simmetria centrale	Simmetrico del punto B rispetto al punto C	Punto B'	
Semiretta	Di origine C passante per B'	Semiretta CB'	
Simmetria centrale	Simmetrico del punto B rispetto al punto C'	Punto B''	
Semiretta	Di origine C' passante per B''	Semiretta $C'B''$	
Trasporto di misura	Della misura di FC sulla semiretta CB'	Punto F	

Trasporto di misura	Della misura di $F'C'$ sulla semiretta $C'B''$	Punto F'	
Retta	Per punti E e F	Retta k	Rappresenta una soluzione del problema
Retta	Per i punti E' e F'	Retta k'	Rappresenta una soluzione del problema
Intersezione di due oggetti	Della retta k con la retta r	Punto D	
Intersezione di due oggetti	Della retta k' con la retta r	Punto D'	

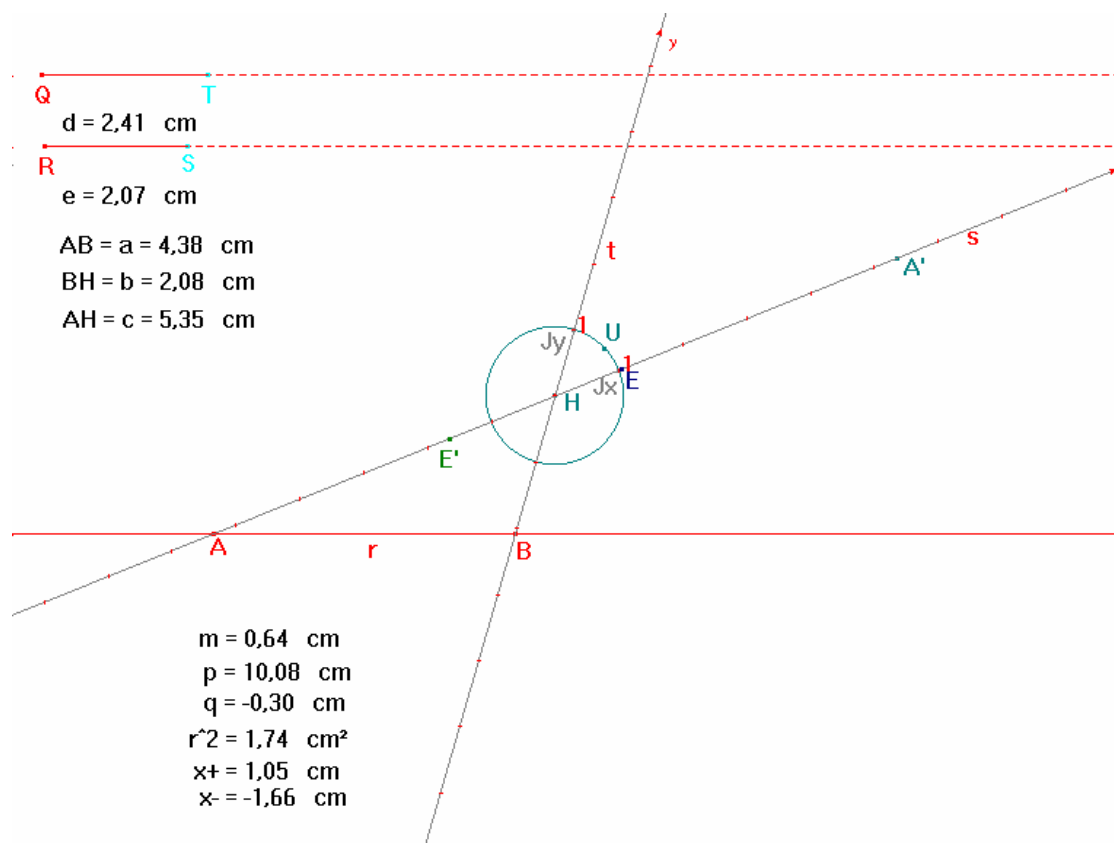


Figura 3

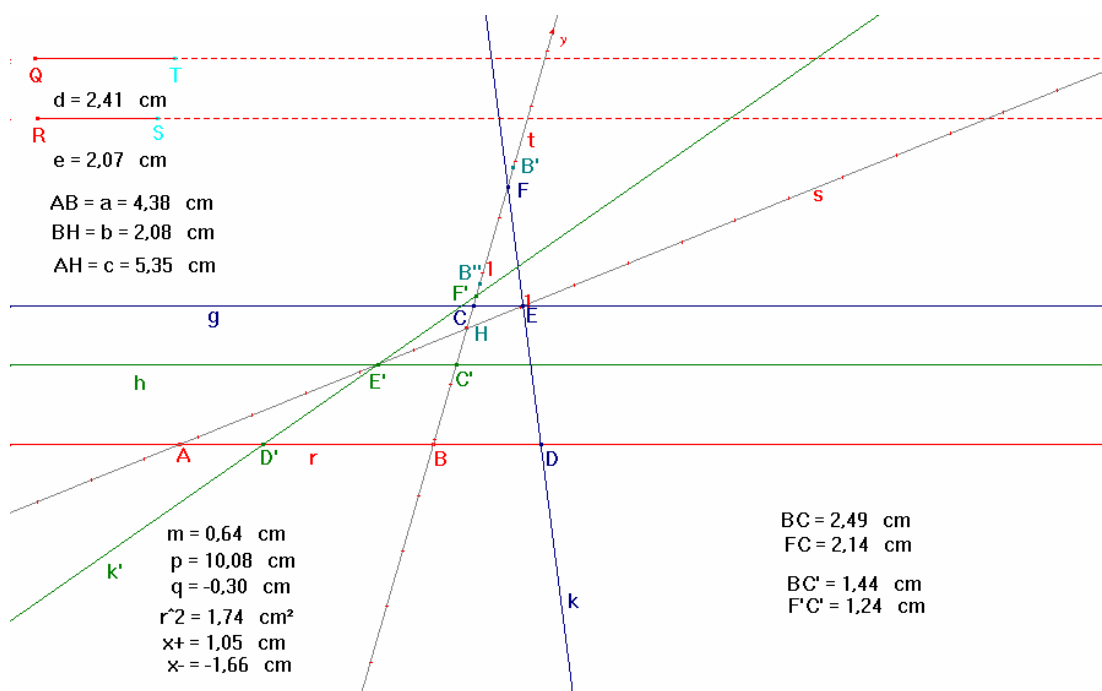


Figura 4

Nel disegno interattivo compaiono entrambe le soluzioni (fig. 5), ed è presente una casella di testo in cui è indicato quali sono gli oggetti mobili e come possono essere spostati.

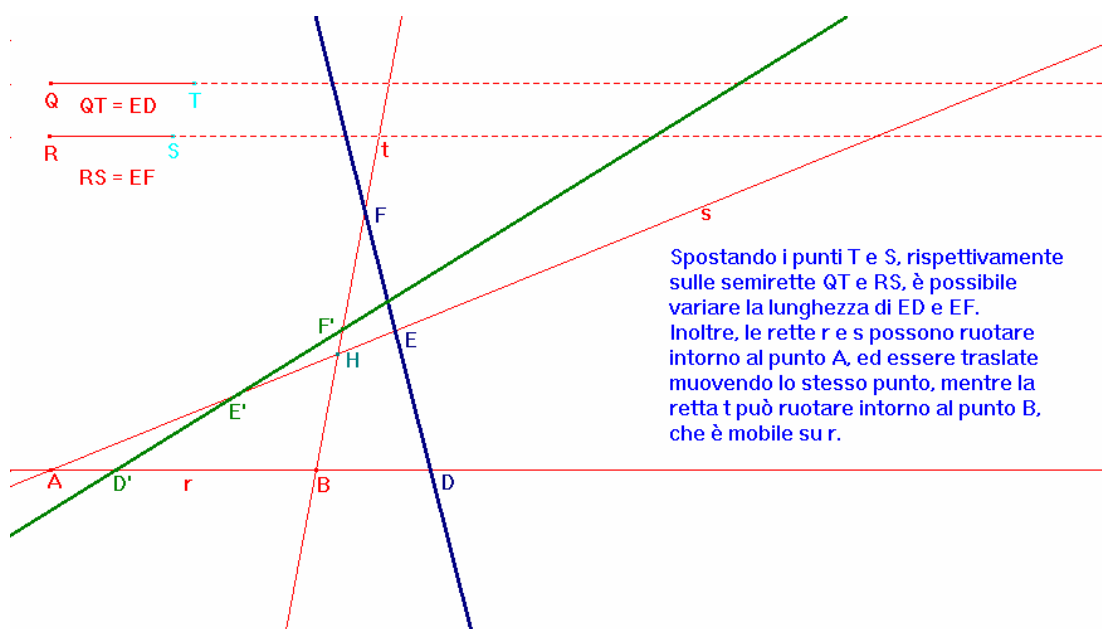


Figura 5

2.3 Problema XXVI

Date tre rette AE, BF, CF, trovare un punto D tale che, se da questo punto si abbassano su ciascuna delle rette, le perpendicolari DA, DB, DC, queste perpendicolari sono tra loro in un rapporto dato.

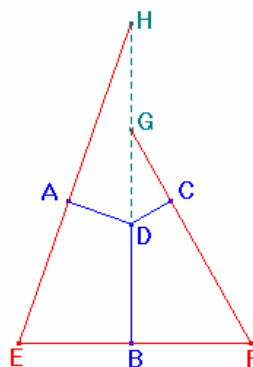


Figura 1

Posto, in accordo con i *DATI* di Euclide, $EF = a$, $\frac{EB}{BH} = \frac{d}{e}$ e $\frac{BF}{BG} = \frac{d}{f}$, Newton sceglie

come incognite $EB = x$ e $BD = y$, e presi h e k tali che $BD : AD :: \sqrt{d^2 + e^2} : h - d$ e

$BD : DC :: \sqrt{d^2 + f^2} : k - d$, riduce il problema al sistema di primo grado $\begin{cases} y = \frac{fa - fx}{k} \\ hy = ex \end{cases}$ di

cui dà la soluzione $\begin{cases} x = \frac{afh}{ek + fh} \\ y = \frac{ex}{h} \end{cases}$.

Segue l'elenco delle operazioni eseguite con *CABRI*, per realizzare il disegno interattivo relativo al problema in esame:

<i>Comando utilizzato</i>	<i>Specificazione</i>	<i>Oggetto costruito</i>	<i>Note</i>
Retta	Per F	Retta r	Rappresenta la retta EF (fig. 2)
Punto su un oggetto	Sulla retta r	Punto E	

Numero		Numero 1	Rappresenta l'unità di misura del sistema di assi in cui verrà riportata la soluzione del sistema risolvete
Retta	Per O	Retta m	Non appare in quanto è stata nascosta (●)
Punto su un oggetto	Sulla retta m	Punto O'	
Trasporto di misura	Del numero 1 sul punto O	Punto K	(●)
Circonferenza	Di centro O passante per K	Circonferenza β	(●)
Trasporto di misura	Del numero 1 sul punto O'	Punto K'	(●)
Circonferenza	Di centro O' passante per K'	Circonferenza β'	(●)
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza β con la retta m	Punti P e P'	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza β' con la retta m	Punti W e W'	
Arco di circonferenza	Di vertici P e P' e punto intermedio K	Arco di circonferenza α	
Arco di circonferenza	Di vertici W e W' e punto intermedio K'	Arco di circonferenza α'	
Punto su un oggetto	Sull'arco di circonferenza α	Punto V	
Punto su un oggetto	Sull'arco di circonferenza α'	Punto V'	
Vettore	Di origine O ed estremo V		
Vettore	Di origine O' ed estremo V'		
Retta parallela	Al vettore OV passante per E	Retta s	Il movimento di V sull'arco α , fa ruotare s intorno al punto E
Retta parallela	Al vettore $O'V'$ passante per F	Retta t	Il movimento di V' sull'arco α' , fa ruotare t intorno al punto F ¹⁷⁹

¹⁷⁹ Sebbene in tal modo le rette EA e FC possano ruotare al più di 180° , ciò non comporta alcuna perdita di generalità, in quanto, la rotazione di una delle due rette di un angolo maggiore di 180° , coincide con la rotazione della stessa retta di un angolo pari al suo supplementare.

Semiretta	Di origine R	Semiretta q	
Semiretta	Di origine S	Semiretta q'	
Punto su un oggetto	Sulla semiretta q	Punto Q	Il punto Q è mobile sulla semiretta q
Punto su un oggetto	Sulla semiretta q'	Punto L	Il punto L è mobile sulla semiretta q'
Segmento		Segmento RQ	
Segmento		Segmento SL	
Distanza e lunghezza	Del segmento RQ		Rappresenta il valore di $\frac{BD}{DC}$
Distanza e lunghezza	Del segmento RS		Rappresenta il valore di $\frac{BD}{AD}$
Trasporto di misura	Del numero 1 sul punto E	Punto U	
Circonferenza	Di centro E passante per U	Circonferenza γ	
Retta perpendicolare	Alla retta r passante per E	Retta z	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza γ con la retta r	Punto J_x	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza γ con la retta z	Punto J_y	
Nuovi assi	Di origine E , e assi EJ_x e EJ_y	Sistema di assi EJ_xJ_y	
Distanza e lunghezza	Del punto E dal punto F		Rappresenta il valore di a
Misura dell'angolo	Individuato dai punti K , O e P'		Rappresenta la misura dell'angolo AEB
Misura dell'angolo	Individuato dai punti K' , O' e W'		Rappresenta la misura dell'angolo CFB
Calcolatrice	Calcolo del valore dell'espressione $tg\hat{AEB}$		Rappresenta il valore di e
Calcolatrice	Calcolo del valore dell'espressione $tg\hat{CFB}$		Rappresenta il valore di f ¹⁸⁰

¹⁸⁰ Poiché $\frac{EB}{BH} = \frac{d}{e}$ e $\frac{BF}{BG} = \frac{d}{f}$, sono rispettivamente uguali alla cotangente dell'angolo \hat{AEB} , e dell'angolo \hat{CFB} , ho supposto $d = 1$, e ho dedotto che allora $BH = e = tg\hat{AEB}$ e $BG = f = tg\hat{CFB}$.

Calcolatrice	Calcolo del valore dell'espressione $tg\hat{C}\hat{F}B$		Rappresenta il valore di f ¹⁸¹
Calcolatrice	Calcolo del valore dell'espressione $\sqrt{d^2 + e^2} \cdot \frac{BD}{AD} + d$		Rappresenta il valore di h
Calcolatrice	Calcolo del valore dell'espressione $\sqrt{d^2 + f^2} \cdot \frac{BD}{DC} + d$		Rappresenta il valore di k
Calcolatrice	Calcolo del valore dell'espressione $\frac{afh}{ek + fh}$		Rappresenta il valore di x
Calcolatrice	Calcolo del valore dell'espressione $\frac{ex}{h}$		Rappresenta il valore di y
Trasporto di misura	Del valore di x sull'asse delle ascisse del sistema $EJxJy$	Punto B	
Trasporto di misura	Del valore di y sull'asse delle ordinate del sistema $EJxJy$	Punto T	(fig. 3)
Retta perpendicolare	Alla retta r passante per B	Retta z'	
Retta perpendicolare	Alla retta z passante per H	Retta r'	
Intersezione di due oggetti	Della retta z' con la retta r'	Punto D	Rappresenta la soluzione del problema

¹⁸¹ Poiché $\frac{EB}{BH} = \frac{d}{e}$ e $\frac{BF}{BG} = \frac{d}{f}$, sono rispettivamente uguali alla cotangente dell'angolo $A\hat{E}B$, e dell'angolo $C\hat{F}B$, ho supposto $d = 1$, e ho dedotto che allora $BH = e = tgA\hat{E}B$ e $BG = f = tgC\hat{F}B$.

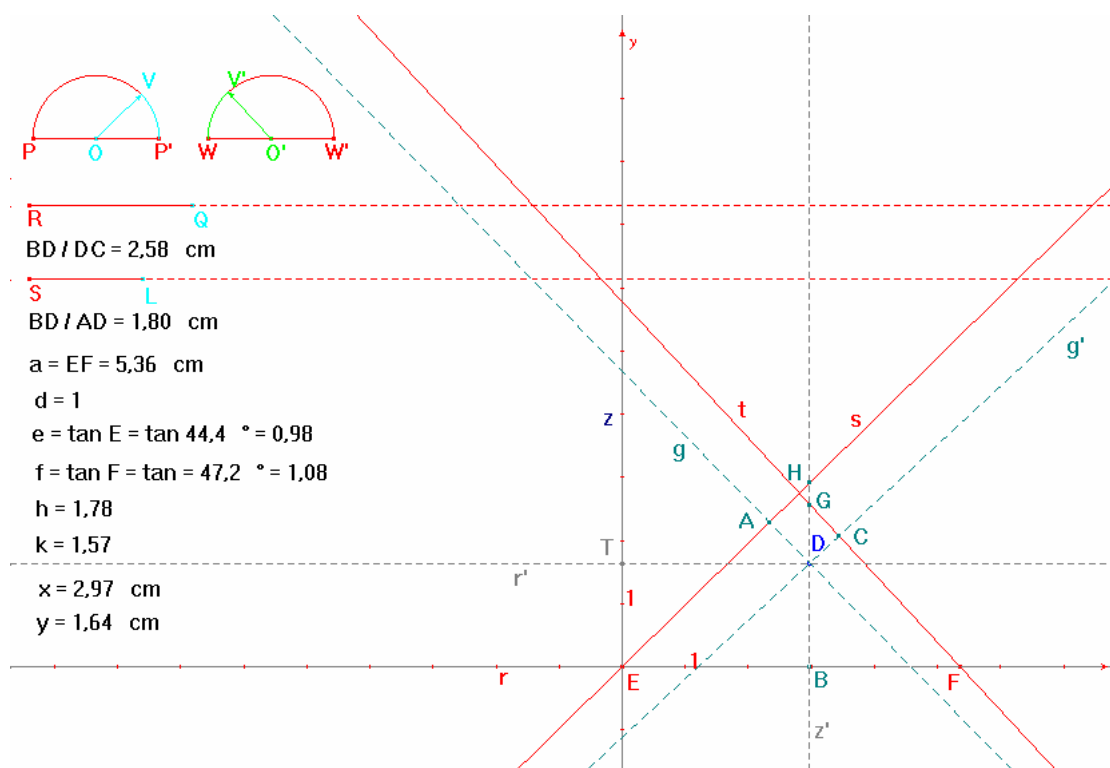


Figura 3

Retta perpendicolare	Alla retta s passante per D	Retta g	
Retta perpendicolare	Alla retta t passante per D	Retta g'	
Intersezione di due oggetti	Della retta g con la retta s	Punto A	
Intersezione di due oggetti	Della retta g' con la retta t	Punto C	
Intersezione di due oggetti	Della retta z' con la retta s	Punto H	
Intersezione di due oggetti	Della retta z' con la retta t	Punto G	

The diagram shows a horizontal line with points E , B , and F . A vertical line segment BD is drawn from B to point D . Two intersecting lines, t and s , pass through D . Line t intersects the horizontal line at E and passes through point A on line s . Line s intersects the horizontal line at F and passes through point C on line t . A dashed vertical line segment DH is drawn from D to point H on line t . A point G is marked on line s between D and H . Above the main diagram, there are two circular arcs. The left arc, centered at O (point B), has endpoints P and P' on the horizontal line and a point V on line t . The right arc, centered at O' (point F), has endpoints W and W' on the horizontal line and a point V' on line s . To the left of the main diagram, there are two horizontal dashed lines. The top one is labeled R and BD/DC with a point Q on line t . The bottom one is labeled S and BD/AD with a point L on line s .

Spostando V e V' , sugli archi di circonferenza in cui giacciono, è possibile variare l'inclinazione di s e t , inoltre spostando i punti Q e L , rispettivamente lungo le semirette RQ e SL , è possibile variare il rapporto di BD su DC e su AD .

202

3

Costruzioni relative a luoghi geometrici

Nel presente capitolo è descritta la costruzione delle immagini interattive relative a problemi in cui è richiesta la determinazione del luogo geometrico descritto da un opportuno punto, al variare della posizione degli oggetti che costituiscono i dati iniziali del problema. In particolare, nel Problema XXXIV il luogo geometrico determinato è la *Cissoide*, nel Problema XXXIX è il *Cerchio di Apollonio*, mentre negli altri problemi è una delle tre sezioni coniche.

3.1 Problema XXXIV

Se si eleva su una retta AF una perpendicolare AD di lunghezza data, e una gamba ED della squadra DEF passa sempre per il punto D , mentre l'altra gamba EF , uguale ad AD , scivola su AF , trovare la curva HIC descritta dal punto C ¹⁸² durante questo movimento, mediante la retta EF .

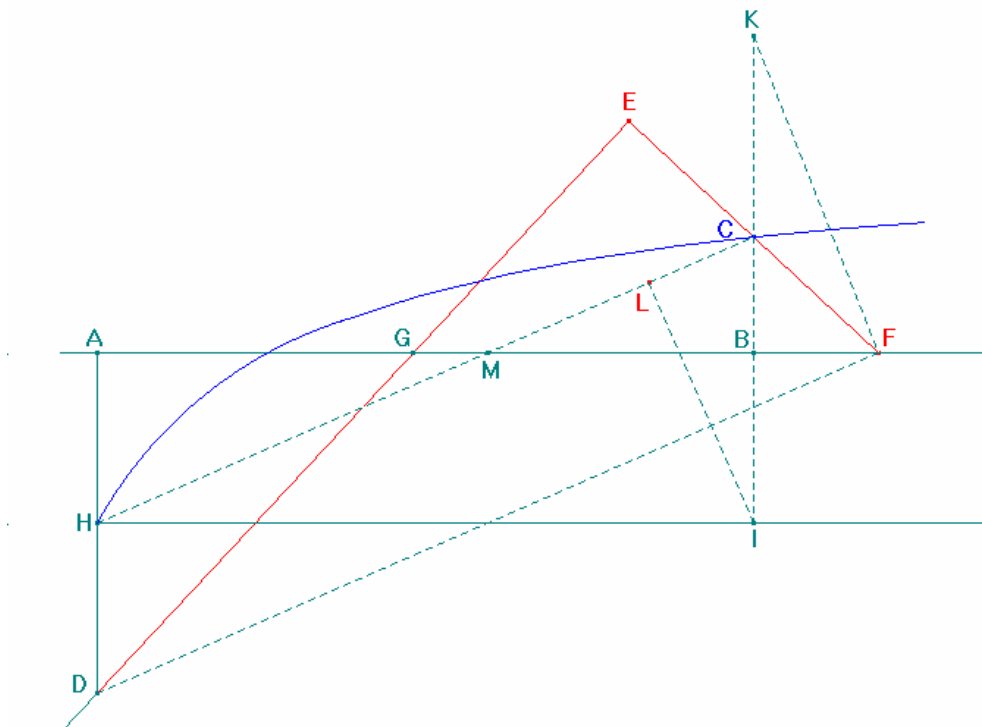


Figura 1

Per risolvere il problema, posto $CF = a$ e condotta la perpendicolare CB a AF , Newton dapprima sceglie come incognite $AB = x$ e $CB = y$, determinando la curva di equazione

$$y^3 + 3ay^2 + 3a^2x^2 \left\{ \begin{array}{l} y + a^3 = 0, \text{ e poi, esteso } CB \text{ in modo che } BI = CK = CF, \text{ e condotta la} \\ -ax^2 \end{array} \right.$$

perpendicolare IL a HC , sceglie come incognite $HI = x$ e $IC = y$, determinando la curva di equazione $2ax^2 - yx^2 = y^3$.

¹⁸² C è il punto medio di EF .

Il motivo per cui Newton sceglie di presentare il secondo metodo di risoluzione risiede, molto probabilmente, nel fatto che l'equazione $2ax^2 - yx^2 = y^3$ rende evidente che la curva che costituisce il luogo descritto dal punto C è, come egli stesso precisa, la *cissoide*¹⁸³, definita dal cerchio di centro A e raggio AH ¹⁸⁴.

In generale, dato un cerchio di centro O , e raggio OA , e considerati due suoi diametri perpendicolari AB e CD (fig. 2), un punto M di tale curva si ottiene prendendo due archi uguali AE e AG , e intersecando la retta per G parallela ad AB , con la retta CE . Oppure, dal momento che la tangente in D al cerchio in questione interseca la retta CE in un punto F , tale che $CE = MF$, tale curva si può costruire molto più semplicemente riportando su ogni retta CF , uscente da C , il segmento $FM = CE$ ¹⁸⁵.

Ciò che dà particolare importanza al risultato di Newton, è che il presente problema fornisce un metodo per la generazione della *cissoide* che, a differenza degli altri, si presta alla sua descrizione con moto continuo.

¹⁸³ Si tratta di una curva ideata da Diocle, geometra vissuto presumibilmente fra il 250 e il 100 A.C., che se ne servì per la duplicazione del cubo, e deve il suo nome alla somiglianza con una foglia di edera.

¹⁸⁴ L'equazione $y^3 + 3ay^2 + (3a^2 + x^2)y + a^3 - ax^2 = 0$, si può scrivere equivalentemente come $(y + a)^3 + x^2(y + a) - 2ax^2 = 0$, rendendo evidente che si tratta della cissoide di vertice H e asintoto parallelo ad AF . *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. V, p. 219, nota 262.

¹⁸⁵ Riportando tale segmento sulla stessa retta, ma dalla parte opposta, si ottiene una curva detta '*compagna*' o '*gemella*' della cissoide (fig. 2).

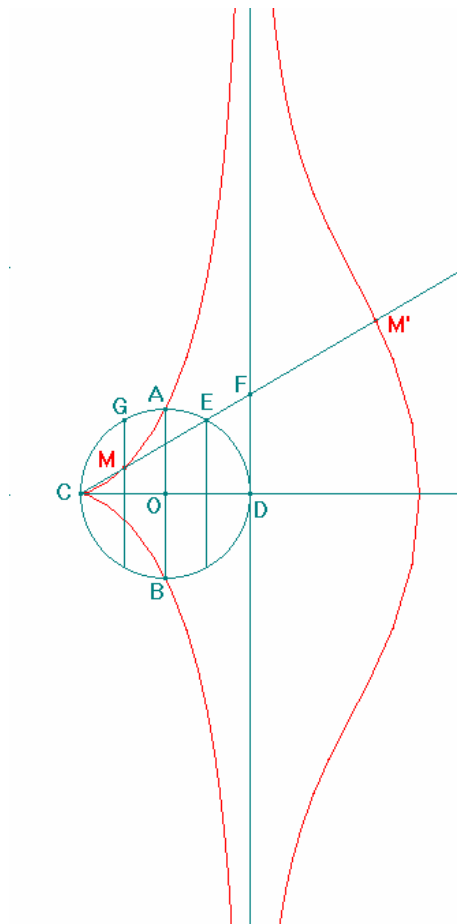


Figura 2

Per realizzare un disegno interattivo relativo al presente problema, dopo aver disegnato una **retta** r , passante per un **punto** A (fig. 3), e aver condotto da tale punto la **retta perpendicolare** t , a r , ho preso un **punto** D su t , e, dopo aver determinato il **punto medio** H , di A e D , ho disegnato il **cerchio** γ , di centro A , passante per H . Determinato poi l'ulteriore **punto d'intersezione** J , della retta t con γ , ho tracciato la **retta parallela** s , a r , passante per J , e ho fissato un **punto** Z su di essa. Fatto ciò, ho determinato il **punto d'intersezione** I , del suddetto cerchio con la retta HZ , e, **riportando** il **segmento** HI sul punto Z , ho individuato poi il **punto** C su HZ , e quindi il **luogo** definito dal punto Z e descritto dal punto C .

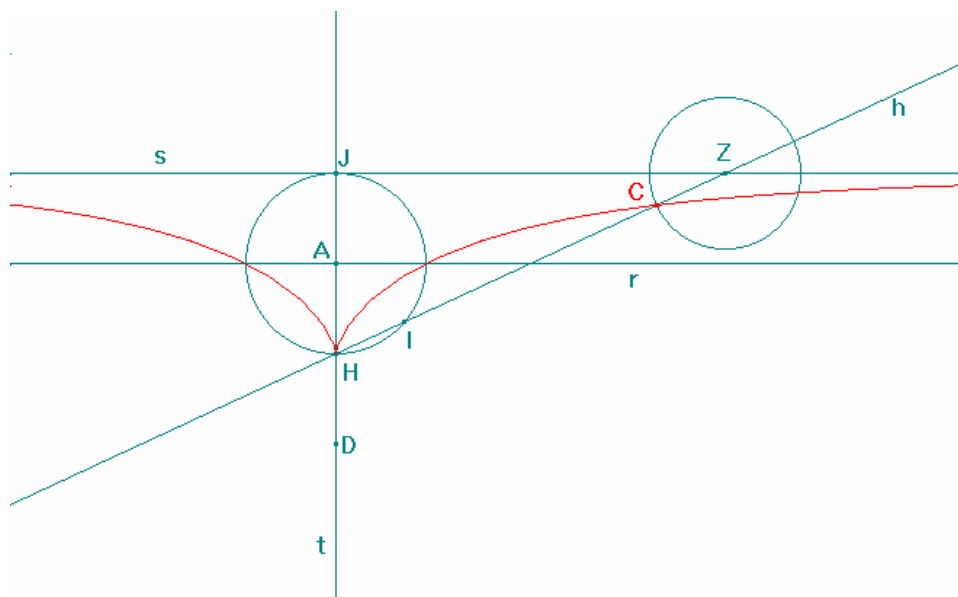
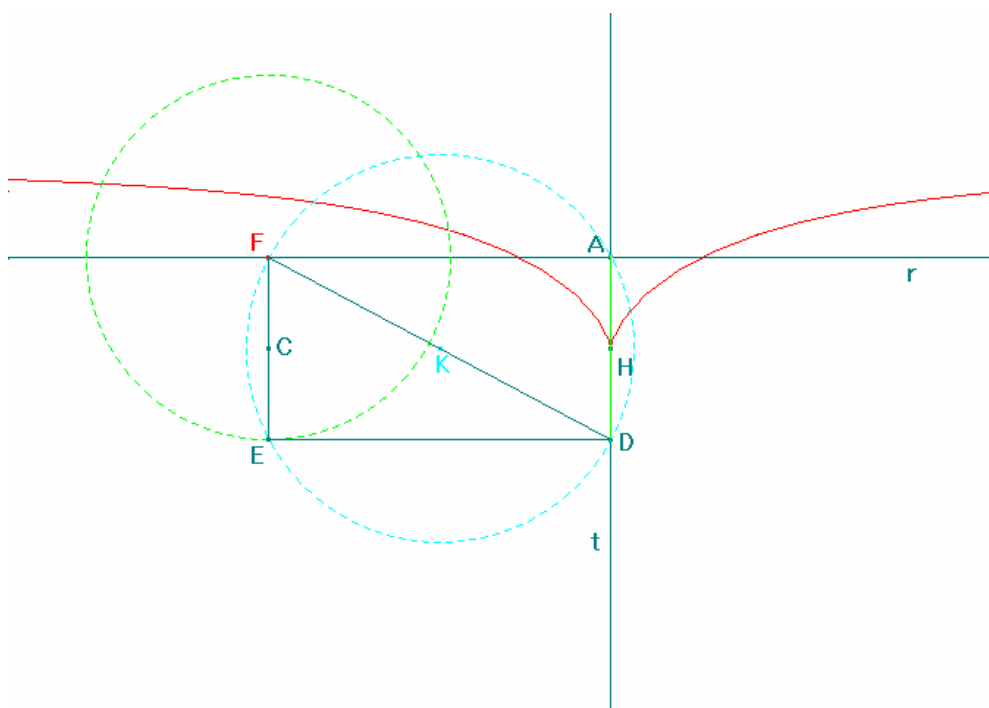
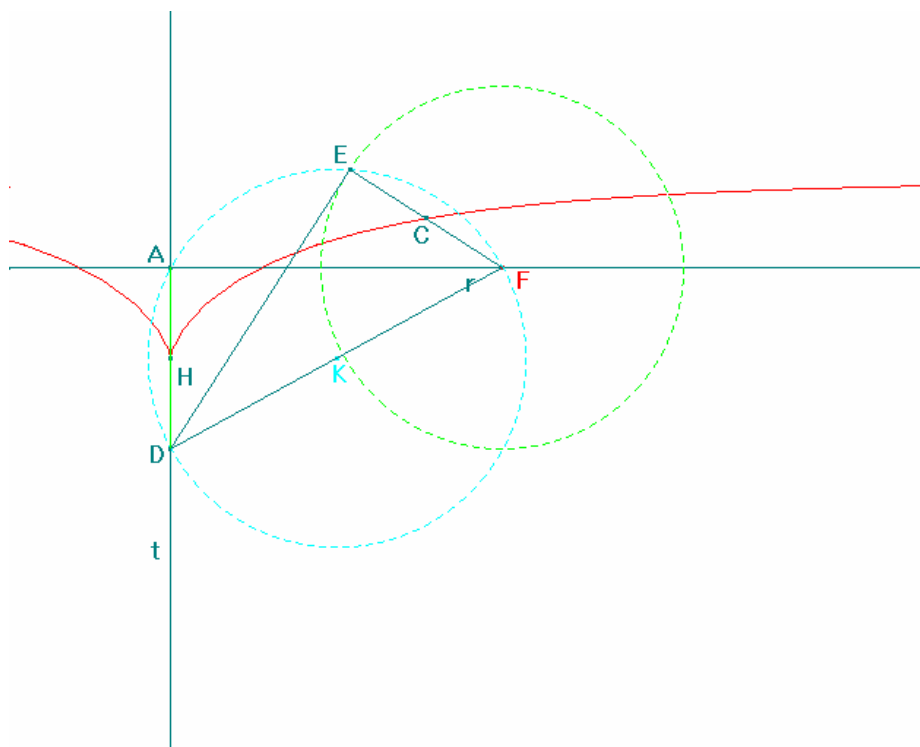


Figura 3

Per completare la costruzione, dopo aver **nascosto** s , HZ , Z , C , γ , J , HI e I (fig. 4), ho fissato un **punto** F , su r , e ho disegnato il **cerchio** avente centro nel **punto medio** K , di D e F , e passante per D . Successivamente, ho disegnato il **punto d'intersezione** E , di tale cerchio con il cerchio ottenuto **riportando** il **segmento** AD sul punto F , e poi ho disegnato i **segmenti** DE , DF e EF , e infine il **punto medio** C , di EF , che appartiene al luogo e lo descrive al variare della posizione di F su r .

Analizzando la figura ottenuta per verificarne la correttezza, ho constatato che spostando F a sinistra del punto A , si ottiene un segmento EF il cui punto medio non giace sul luogo (fig. 5). Pertanto, per ovviare a tale inconveniente, ho **ridefinito** il punto E , come punto d'intersezione del cerchio di centro F e raggio AD , con l'**arco** DAF (fig. 6).



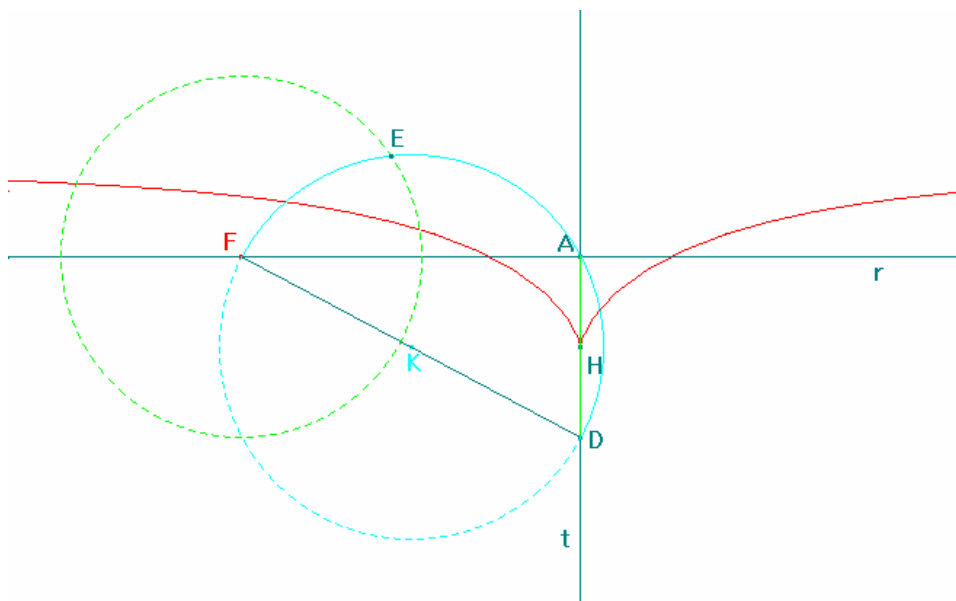


Figura 6

La figura costruita è ora corretta, dunque inserendo in essa una casella di testo, in cui è indicato quali sono gli oggetti mobili e come possono essere spostati, ho ottenuto un disegno interattivo che illustra esaurientemente il problema esaminato (fig. 7).

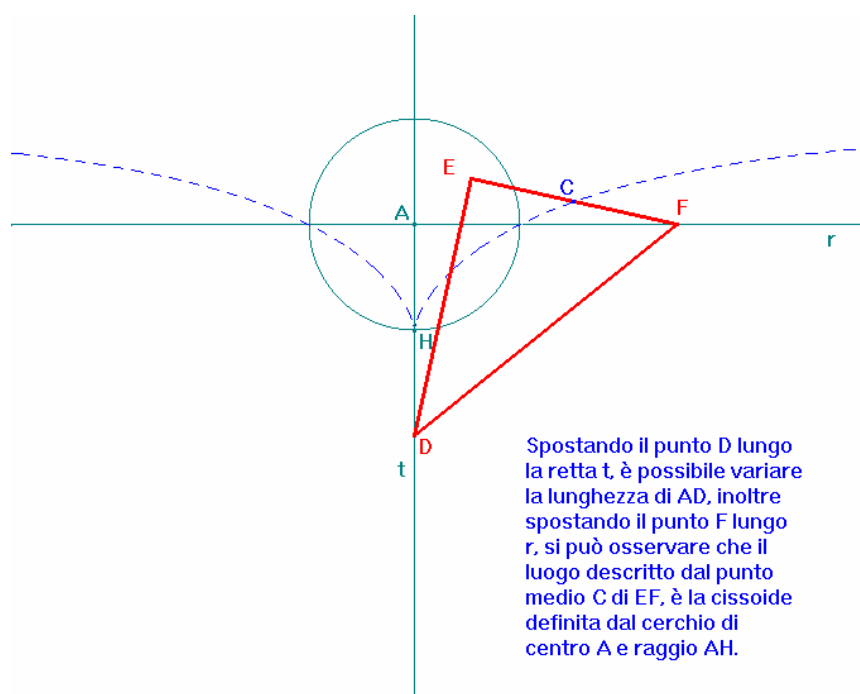


Figura 7

3.2 Problema XXXV

Se un segmento ED , di lunghezza nota, sottendente un angolo dato EAD , si inserisce in tale angolo in modo che le sue estremità D ed E tocchino sempre i lati dell'angolo AD e AE , determinare la specie della curva FCG descritta dal punto C ¹⁸⁶ del segmento DE , durante il movimento.

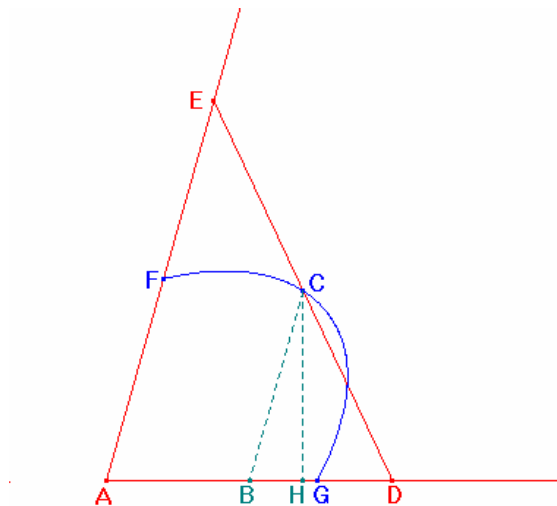


Figura 1

Per risolvere il problema, dopo aver condotto dal punto C , la parallela CB alla retta EA , e la perpendicolare CH alla retta AD , Newton pone $CE = a$, $CD = b$, $\frac{BC}{BH} = \frac{a}{e}$, e, scelte come incognite $AB = x$ e $BC = y$, determina l'equazione del luogo $y^2 = \frac{2be}{a^2} \cdot yx + \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$, che rappresenta un'ellisse.

Per realizzare con *CABRI* un disegno interattivo relativo a tale problema, dopo aver disegnato un **punto** A , e una **retta** r passante per A (fig. 2), ho **trasportato** il **numero** 1 sul **punto** A , individuando un punto U , e, dopo aver determinato i **punti d'intersezione** J e K , del cerchio di centro A passante per U , con la retta r , ho disegnato un **punto** Z , sull'**arco di circonferenza** JUK , e la **retta** t , passante per A e Z ¹⁸⁷. Per completare la costruzione dei

¹⁸⁶ Si tratta del punto medio del segmento ED .

¹⁸⁷ Il movimento di Z , sull'arco JUK dà luogo alla rotazione di t attorno al punto A , e permette di variare l'ampiezza dell'angolo EAD .

Nel caso in cui l'angolo EAD è ottuso o retto, in tal modo si ottiene un solo segmento ED , tuttavia, poiché in caso contrario ad alcune posizioni di D su AK corrispondono due segmenti (fig. 3), dopo aver individuato l'ulteriore **punto d'intersezione** E' , del cerchio compasso di centro D e raggio ED , con la semiretta AZ , ho disegnato anche il **luogo** descritto dal **punto medio** C' , del **segmento** $E'D$.

211

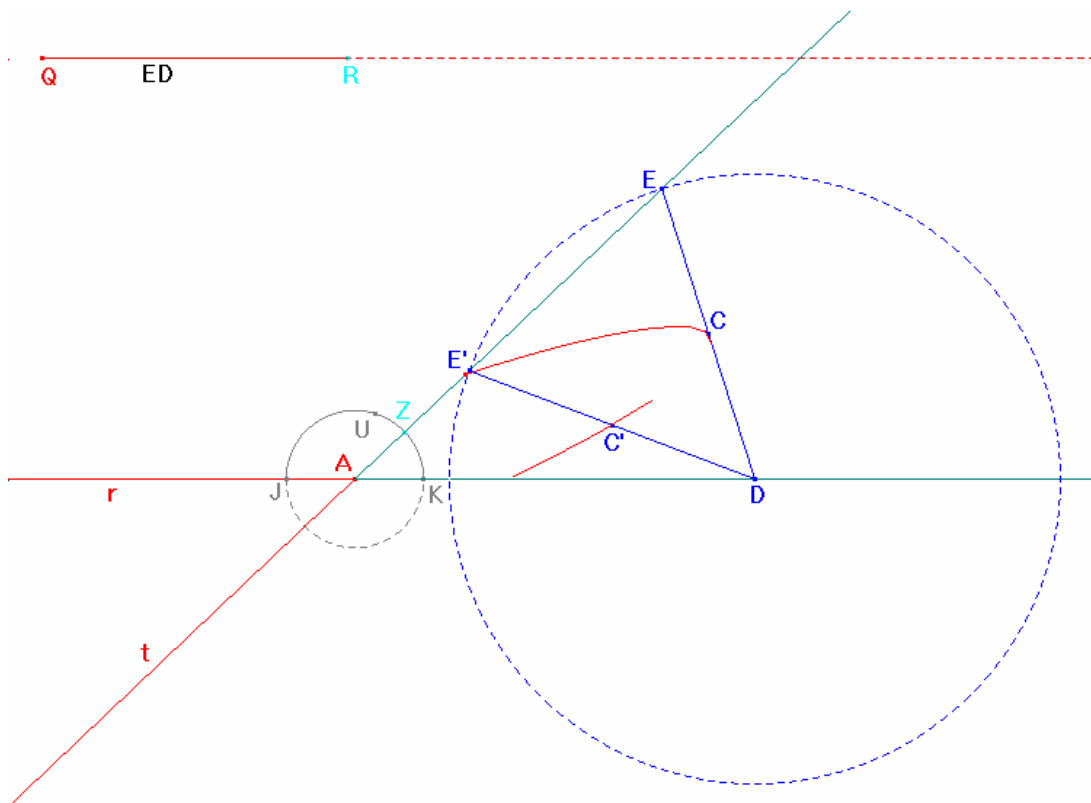


Figura 3

Sebbene tale costruzione sia corretta, essa presenta alcuni inconvenienti.

Più precisamente, quando il punto D si allontana dal punto A , il punto E non esiste, pertanto la costruzione viene invalidata. Inoltre, nel caso in cui l'angolo EAD è acuto, appaiono due segmenti, ED e $E'D$, e ciò rende non evidente il movimento del segmento ED che fa descrivere con continuità al punto C , l'arco di ellisse interno all'angolo EAD . E ancora, il luogo non appare nella sua completezza ma solo a tratti.

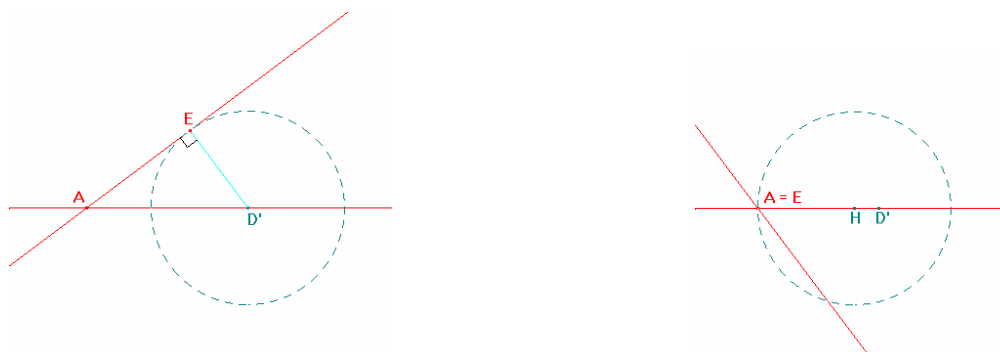
Per ovviare al primo inconveniente, occorre determinare la massima distanza che l'estremo D del segmento ED può avere dal punto A , affinché ED sottenda l'angolo EAD , e vincolare opportunamente il movimento di tale punto.

Analizzando a tal fine la figura, ho osservato che il punto D si muove su r tra due posizioni limite, una delle quali è rappresentata dal punto A , mentre l'altra dipende dall'ampiezza dell'angolo EAD . In particolare, nel caso in cui l'angolo EAD è acuto, la seconda posizione

limite è rappresentata dal punto D' , tale che $AD' = \frac{ED}{\sin \angle EAD}$, invece, nel caso in cui

l'angolo EAD è ottuso, essa è rappresentata dal punto H , tale che $AH = ED$ ¹⁸⁹. Poiché $AD' \neq AH$ ¹⁹⁰, occorre distinguere i due casi, e, dal momento che la definizione dei punti E e D , dipende dalle semirette AZ e AK , ho effettuato la diversificazione definendo per ciascun caso, una diversa coppia di semirette. Più precisamente, dopo aver cancellato AZ e AK , ho tracciato la **retta perpendicolare** a r , passante per A (fig. 4), e, dopo aver determinato il suo **punto d'intersezione** L , con l'arco JUK , ho disegnato il **simmetrico** U' di U rispetto alla retta AL . Spostando opportunamente la retta t , ho poi determinato i suoi **punti d'intersezione** Z' e Z'' , con gli **archi di circonferenza** KUL e $JU'L$, e, dopo aver determinato i **punti d'intersezione** K' e K'' , della retta r con i **cerchi** di centro A passanti rispettivamente per Z' e Z'' , ho disegnato le **semirette** AZ' e AK' , che esistono solo nel caso in cui l'angolo EAD è acuto, e le **semirette** AZ'' e AK'' , che esistono solo in caso contrario¹⁹¹.

¹⁸⁹ Affinché il segmento ED possa sottendere l'angolo EAD , il cerchio di centro D e raggio ED deve intersecare il lato AE di tale angolo. Pertanto, nel caso in cui EAD è acuto, il punto limite D' è il centro del cerchio di raggio ED , tangente alla retta AE , invece, nel caso in cui EAD è ottuso, il punto limite H è il centro del cerchio di raggio ED , che interseca tale angolo nel suo vertice.



¹⁹⁰ Fatta eccezione per il caso in cui l'angolo EAD è retto, in quanto $AD' = ED = AH$.

¹⁹¹ Se l'angolo EAD è retto, le due costruzioni coesistono e coincidono.



$ED = 4,44 \text{ cm}$
 $EAD = 49,7^\circ$
 $AD' = 5,83 \text{ cm}$

Figura 5

Invece, nel caso in cui EAD è ottuso, ho **riportato** il segmento QR su A , individuando il **punto** H su AK'' (fig. 6), e, dopo aver disegnato il **punto** D sul **segmento** AH , ho **riportato** il segmento QR su D , e ho individuato il **punto** E su AK' , e quindi il **luogo** descritto dal **punto medio** C , del **segmento** ED .

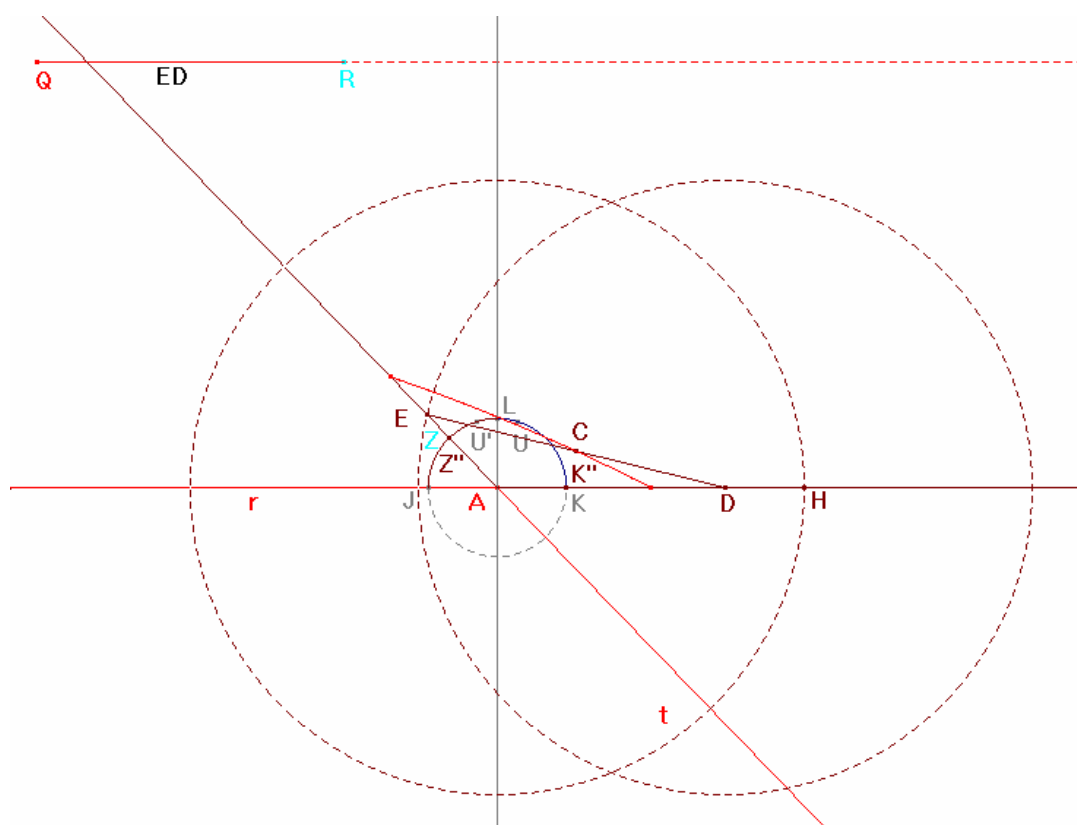


Figura 6

Per ovviare al secondo inconveniente, che si presenta solo nel caso in cui l'angolo EAD è acuto, ho costruito un segmento che coincide con ED o con $E'D$, il cui punto medio descrive l'intero arco di conica, compreso nell'angolo EAD , che costituisce il luogo cercato. Più precisamente, dopo aver cancellato il punto E' , e aver disegnato un **punto** P sulla semiretta AK' (fig. 7), ho **ridefinito** il punto D , come **punto d'intersezione** del segmento AD' , con la **retta perpendicolare** s , condotta da P alla retta r .

In tal modo, poiché il punto D esiste soltanto se P giace sul segmento AD' , il luogo definito da P e descritto dal punto C , rappresenta la prima parte del luogo cercato. Per completare il

The diagram shows a horizontal line with points Q, ED, and R. A vertical line passes through point A. A circle with center A and radius r is shown. A line segment t is drawn from A. A larger circle with center D' and radius s is shown. A line segment s is drawn from D' to point E on the larger circle. A line segment C is drawn from E to point P on the horizontal line. A line segment Z' is drawn from A to point Z' on the larger circle. A line segment U' is drawn from A to point U' on the larger circle. A line segment L is drawn from A to point L on the larger circle. A line segment K' is drawn from A to point K' on the larger circle. A line segment J is drawn from A to point J on the larger circle. A line segment P is drawn from A to point P on the larger circle. A line segment D is drawn from A to point D on the larger circle. A line segment D' is drawn from A to point D' on the larger circle. A line segment E is drawn from A to point E on the larger circle. A line segment C is drawn from A to point C on the larger circle. A line segment Z' is drawn from A to point Z' on the larger circle. A line segment U' is drawn from A to point U' on the larger circle. A line segment L is drawn from A to point L on the larger circle. A line segment K' is drawn from A to point K' on the larger circle. A line segment J is drawn from A to point J on the larger circle. A line segment P is drawn from A to point P on the larger circle. A line segment D is drawn from A to point D on the larger circle. A line segment D' is drawn from A to point D' on the larger circle. A line segment E is drawn from A to point E on the larger circle. A line segment C is drawn from A to point C on the larger circle.

¹⁹² Dei due punti così ottenuti, occorre considerare il punto più vicino ad A .

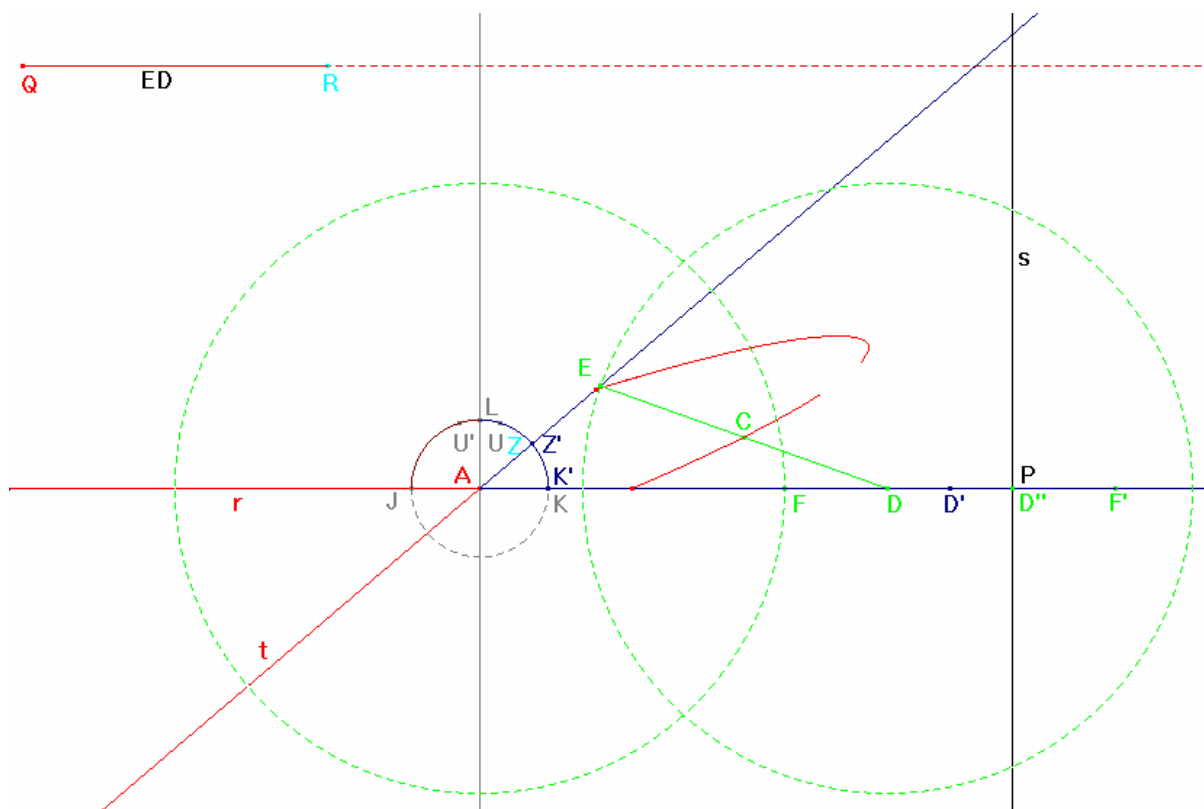


Figura 8

Infine, per ovviare all'ultimo inconveniente, ho deciso di inserire nel disegno interattivo, l'intera ellisse il cui arco costituisce il luogo cercato. A tale scopo, **riportando** QR , su r e su t (fig. 9), ho individuato i **punti** H e H' , e ho determinato i **punti medi** S e T , dei **segmenti** AH e AH' , che sono due punti del luogo, e quindi dell'ellisse in questione¹⁹³. Poi, dal momento che il punto A è il centro di simmetria della curva, ho determinato due ulteriori punti del luogo individuando i **simmetrici** S' e T' , di S e T , rispetto al punto A . E infine, dopo aver disegnato un **punto** D su r , ho **riportato** su di esso il segmento QR , individuando il **punto** E su t , e, dopo aver determinato il **punto medio** G , del **segmento** ED , che ovviamente appartiene al luogo, ho disegnato la **conica** passante per S , T , S' , T' e G .

¹⁹³ Essi rappresentano la posizione del punto C , quando ED giace su uno dei due lati dell'angolo EAD .

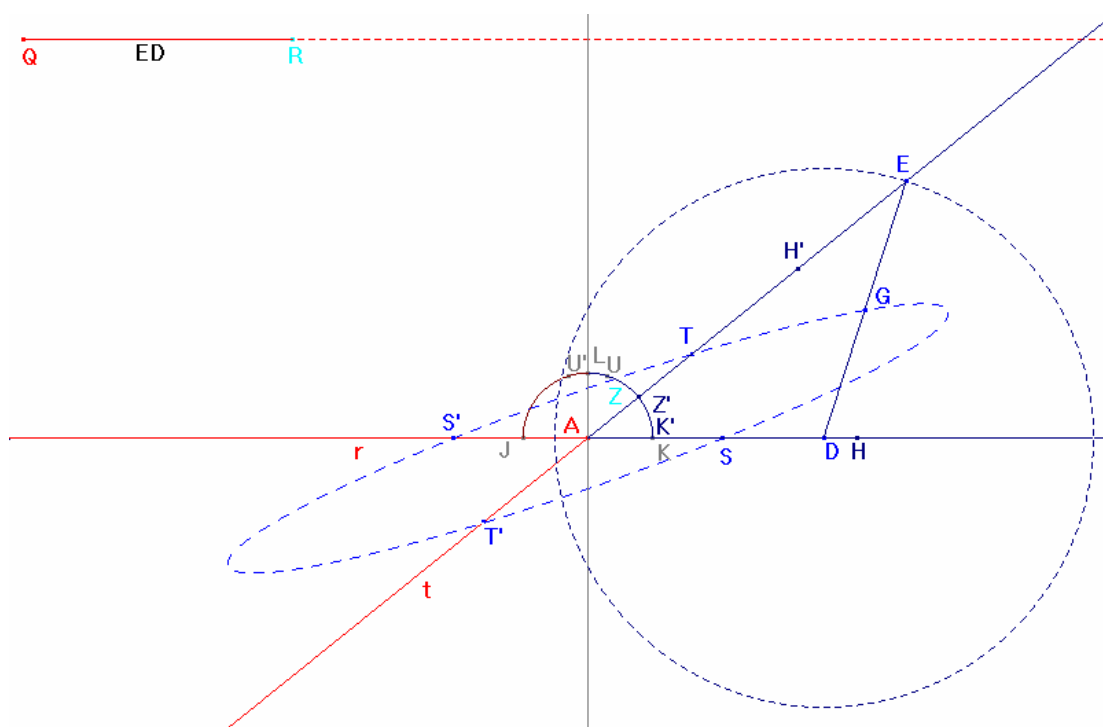


Figura 9

Il disegno così realizzato ha ancora un inconveniente, che si presenta quando l'angolo EAD è retto, ed è dato dalla coesistenza delle costruzioni relative ai casi in cui EAD è acuto o ottuso (fig. 10). Per evitare che ciò accada, ho invalidato la costruzione relativa al caso in cui l'angolo EAD è acuto, **ridefinendo** K' come punto d'intersezione della retta r , con la retta passante per Z' e perpendicolare a r (fig. 11). In tal modo infatti, se l'angolo EAD è retto, la non esistenza della semiretta AK' , dovuta al fatto che il punto K' coincide con A , non permette il completamento della costruzione relativa al caso acuto.



Il disegno interattivo è ora completo e corretto, ma si può ulteriormente migliorare, in quanto, il fatto che nel caso in cui l'angolo EAD è ottuso, il punto che fa muovere la costruzione sia D , mentre nel caso in cui è acuto, tale punto sia P , tradisce l'esistenza di due sottocostruzioni distinte. Per far sì che ci sia un unico punto che muove l'intera costruzione, indipendentemente dall'ampiezza dell'angolo EAD , ho subordinato il movimento dei punti mobili di ciascuna sottocostruzione a quello di un altro punto. Più precisamente, dopo aver disegnato un **segmento** OB , e un **punto** P su di esso, ho **misurato** la lunghezza del **segmento** OP , e dei segmenti OB e AF' , e ho **calcolato** le quantità $n = \frac{OP \cdot AF'}{OB}$ e $m = \frac{OP \cdot AH}{OB} = \frac{OP \cdot ED}{OB}$. **Riportati** i valori di n e m , rispettivamente sulle semirette AK' e AK'' , e individuati in tal modo i punti Dn e Dm , ho poi **ridefinito** il punto mobile D , della costruzione relativa al caso in cui EAD è acuto, identificandolo con Dn (fig. 12), e il punto mobile P , della costruzione relativa al caso in cui EAD è ottuso, identificandolo con Dm (fig. 13).

Poiché il movimento di Dn e Dm è generato dal punto P , per far descrivere l'arco di ellisse che costituisce il luogo al punto C , è sufficiente muovere il punto P lungo il segmento OB , sia nel caso in cui EAD è acuto, sia negli altri casi.

Nel disegno interattivo, ho **nascosto** il punto Dn , e ho rinominato Dm , D , inoltre, ho inserito una casella di testo per indicare quali sono gli oggetti mobili e come possono essere spostati (fig. 14).

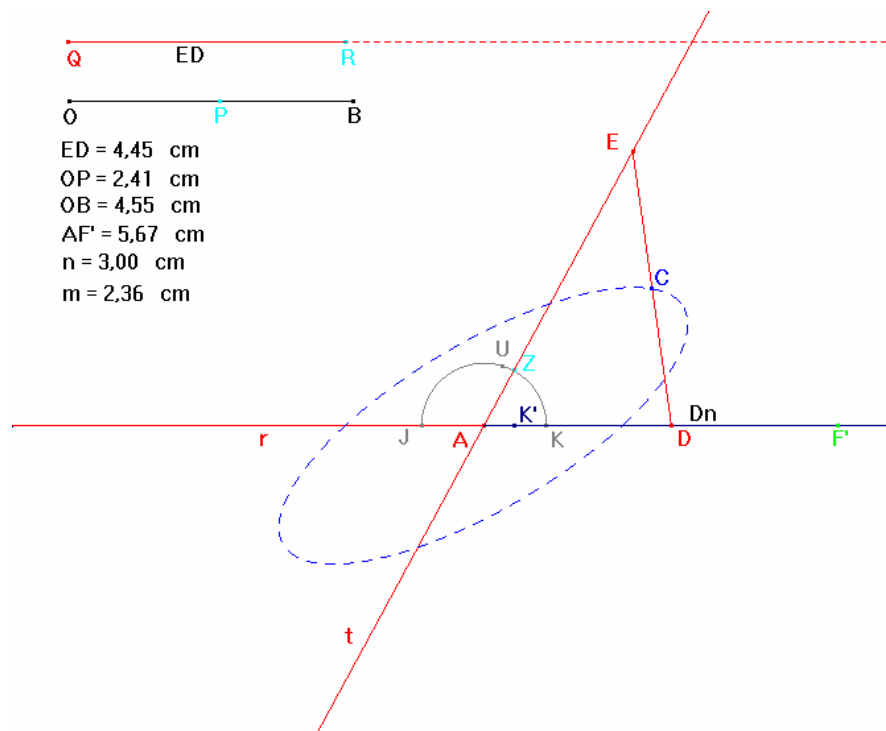


Figura 12

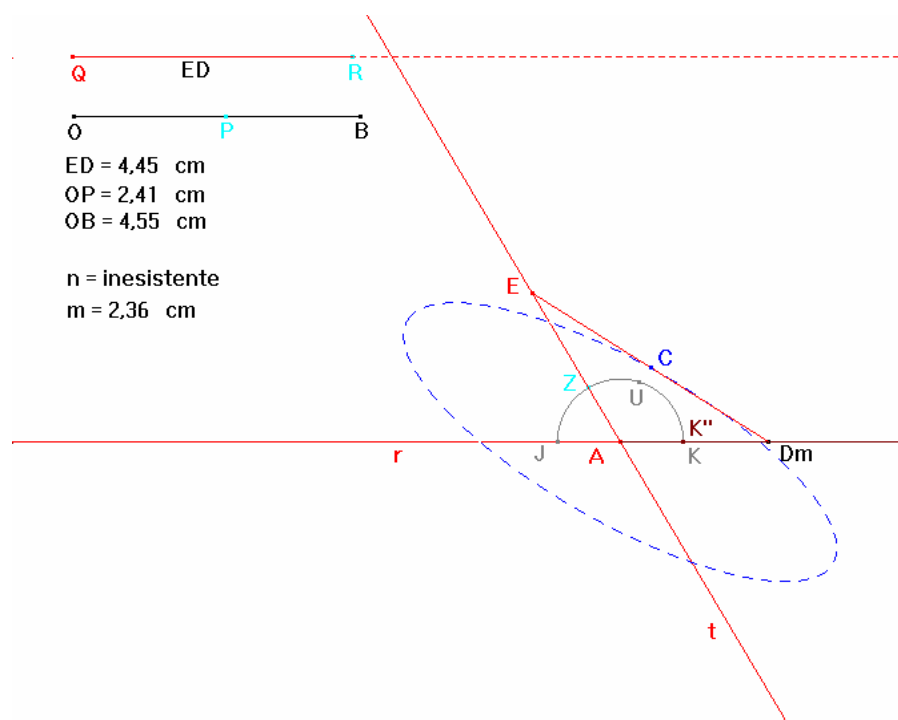


Figura 13

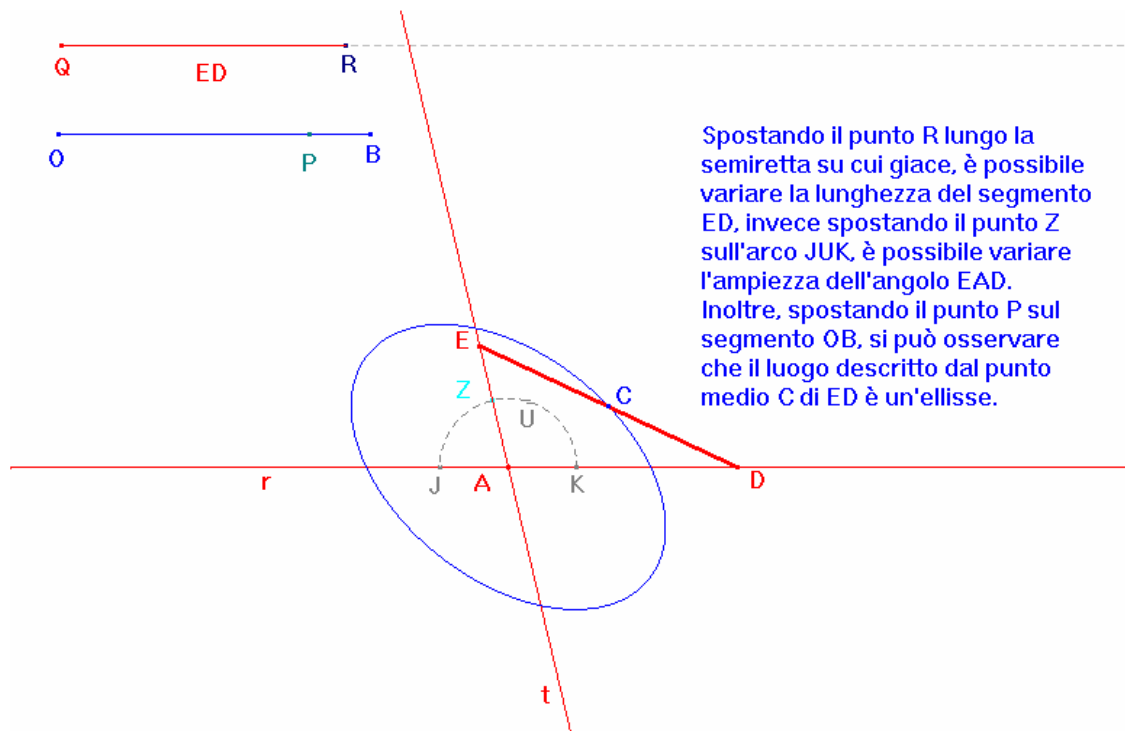


Figura 14

3.3 Problema XXXVI

Se una squadra EBD si mette in modo che una delle sue gambe EB sia appoggiata all'angolo retto EAB, mentre l'estremità D dell'altra gamba BD descrive una curva FDG, determinare questa curva.

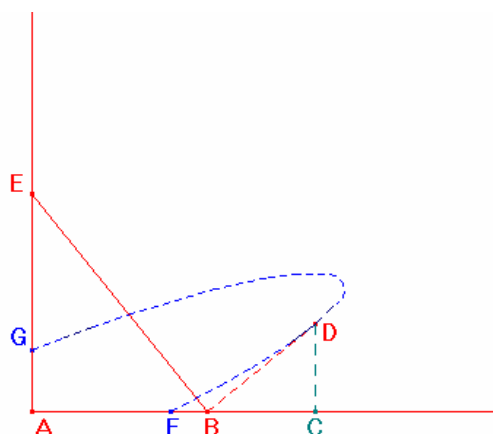


Figura 1

Per risolvere il problema, condotta dal punto D la perpendicolare DC , alla retta AB , Newton sceglie come incognite $AC = x$ e $DC = y$, e, posto $EB = a$ e $BD = b$, determina

l'equazione $y^2 = \frac{2abxy + b^4 - b^2x^2}{a^2 + b^2}$, che rappresenta il luogo cercato, ovvero un'ellisse.

Per costruire con *CABRI* un'immagine interattiva relativa al problema, dopo aver disegnato un **punto** A , una **retta** r passante per A (fig. 2), e la **retta perpendicolare** t , a r passante per A , ho disegnato due **semirette** di origine Q e P , e su di esse rispettivamente i **segmenti** QR e PL , per rappresentare i lati EB e BD della squadra EBD . Successivamente, poiché il vertice B della squadra si muove su r tra due posizioni limite, rappresentate dal punto A e dal punto di r che ha distanza da A pari alla lunghezza di QR , dopo aver **riportato** QR su A , individuando il **punto** B' su r , ho disegnato il **segmento** AB' , e quindi il **punto** B su di esso. **Riportati** poi i segmenti QR e PL su B , ho individuato il **punto** E su t , e il **punto** D sulla **retta perpendicolare** al **segmento** BE , passante per B , e infine, disegnato il **segmento** BD ,

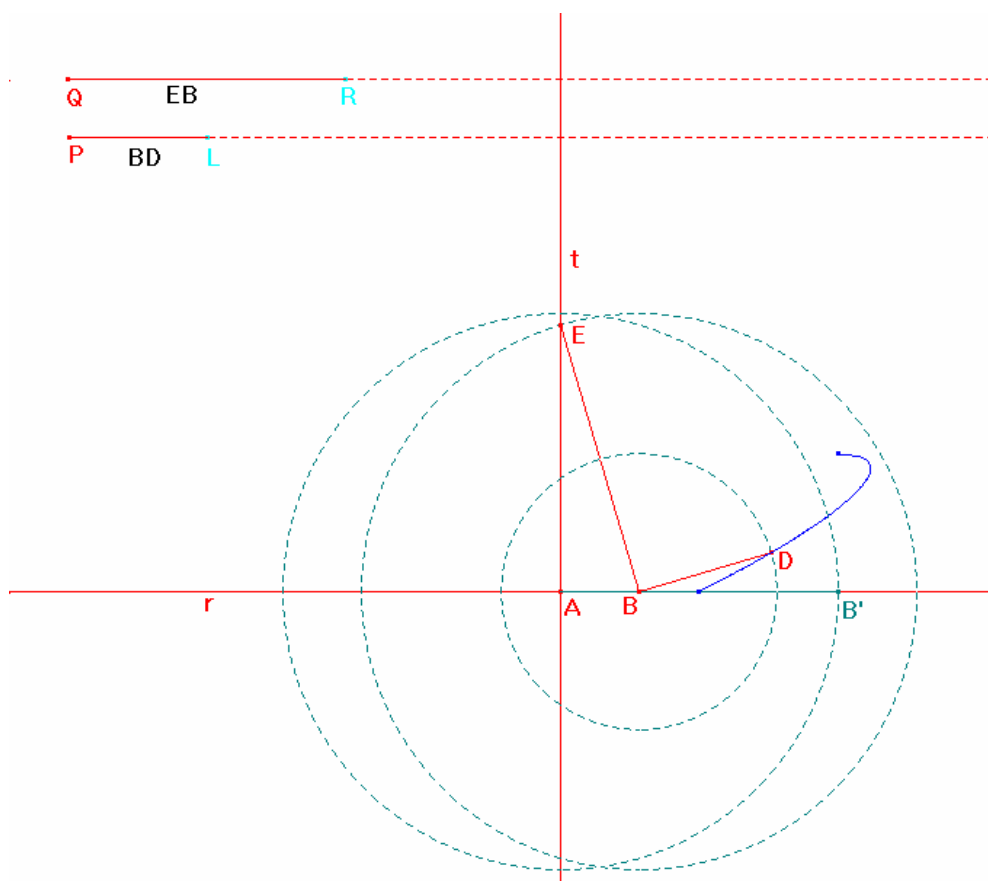


Figura 2

Poiché tale arco non viene visualizzato interamente, ho deciso di rappresentare l'intera ellisse nel disegno interattivo, pertanto, dopo aver determinato cinque **punti** sul luogo, ho disegnato la **conica** passante per essi (fig. 3).

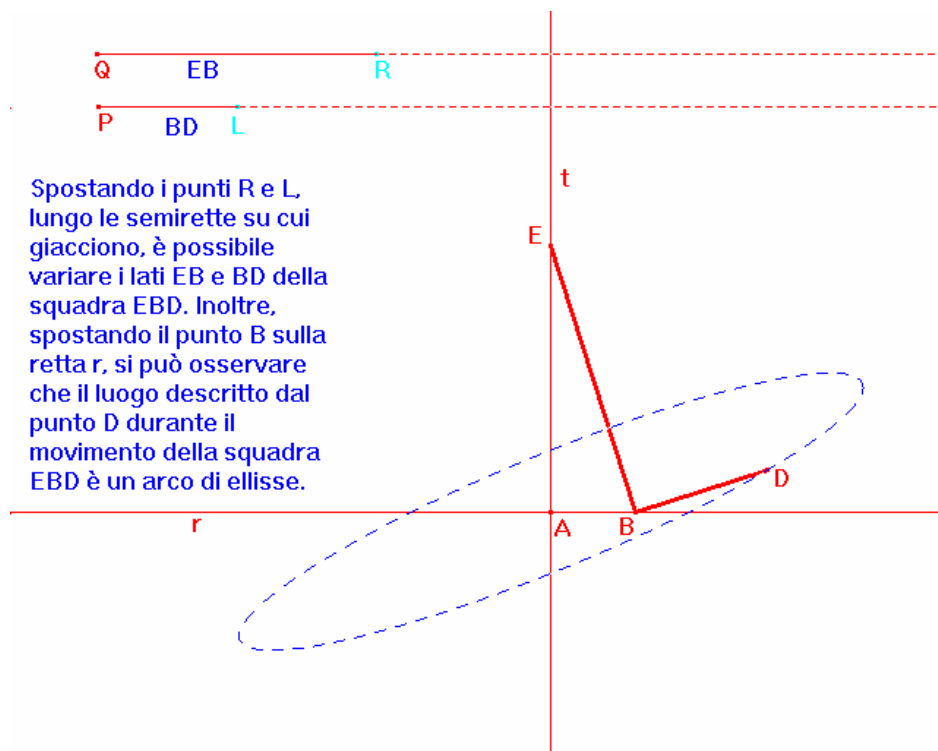


Figura 3

Alla fine della risoluzione, Newton prende in considerazione il caso in cui gli angoli EBD e EAB sono uguali ma non retti. In particolare, tracciato DH in modo che l'angolo DHA sia uguale all'angolo HAE (fig. 4), e scelte come incognite $AH = x$ e $HD = y$, egli dimostra che la curva descritta dal punto D è rappresentata dall'equazione

$$b^2 = x^2 - \frac{2axy}{b} + \frac{a^2y^2}{b^2} + y^2 + \frac{2exy}{b} - \frac{2aey^2}{b^2}, \text{ pertanto essa è ancora un'ellisse.}$$

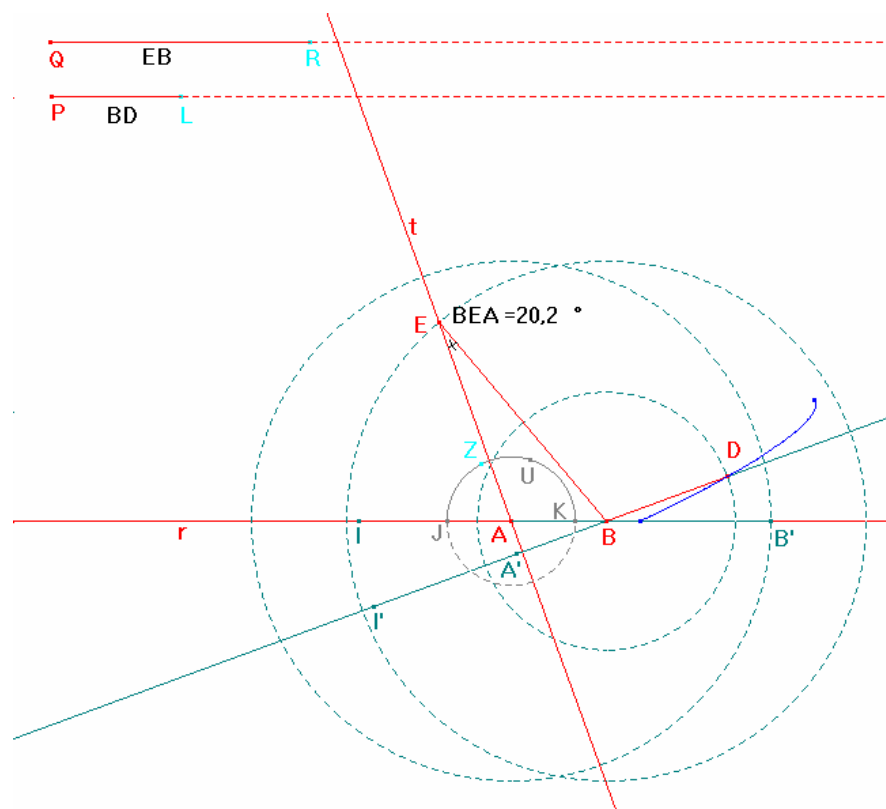


Figura 5

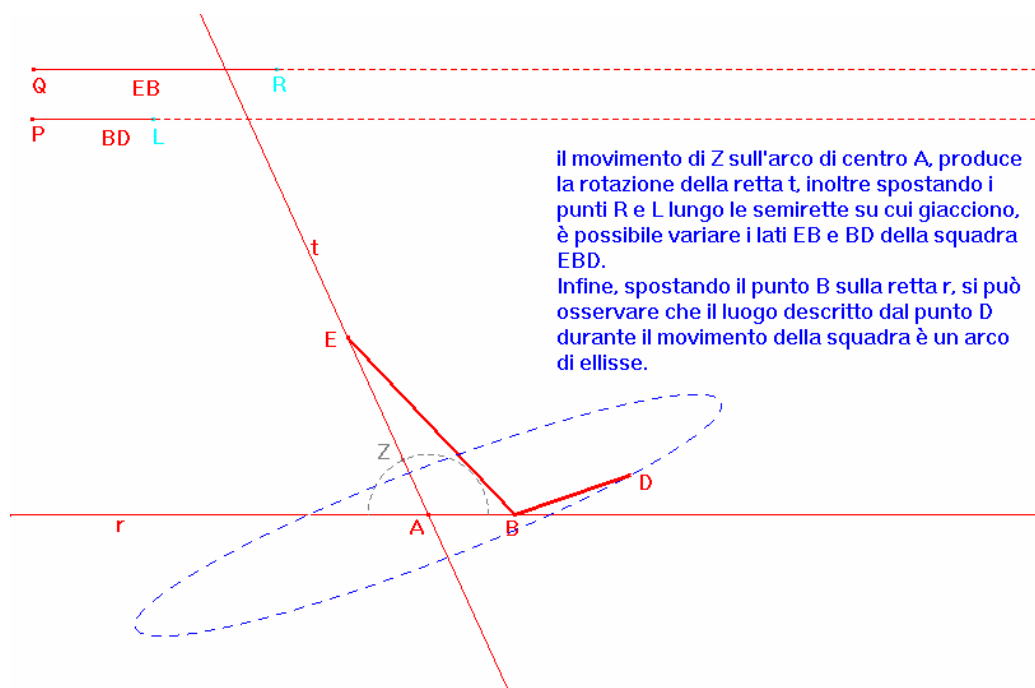


Figura 6

3.4 Problema XXXVIII

Se le due rette VE e VC , date di posizione, sono tagliate in modo qualunque in C e in E , da una retta PE che ruota attorno al punto P dato di posizione, e se il segmento intercettato CE è diviso in due parti CD e DE di rapporto dato, trovare il luogo del punto D .

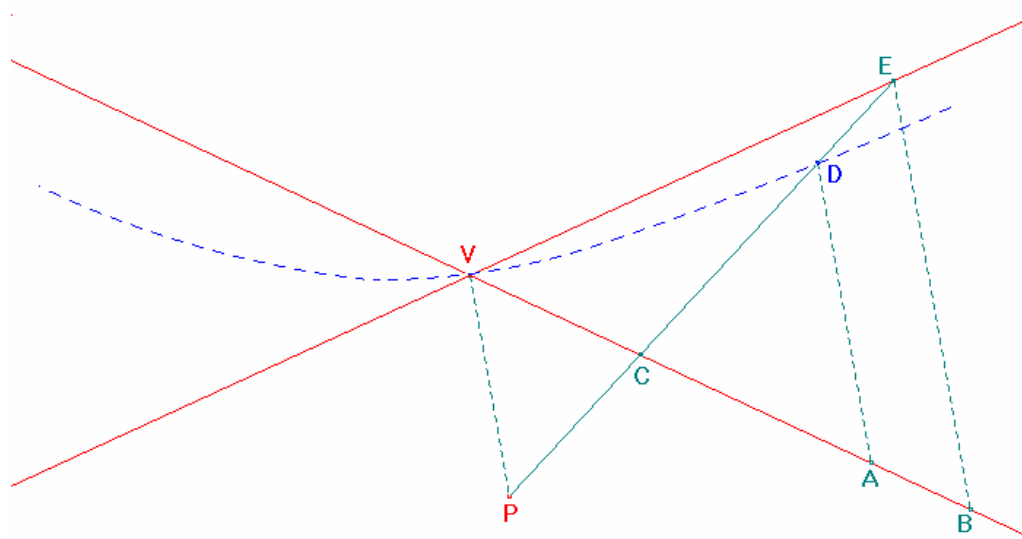


Figura 1

Tracciate DA ed EB parallele a VP , Newton sceglie come incognite $VA = x$ e $AD = y$, e, posto $VP = a$, $\frac{DA}{EB} = \frac{d}{e}$ e $\frac{EB}{VB} = \frac{e}{f}$, ottiene per il luogo cercato l'equazione $exy + adx = fy^2 + fay$, che rappresenta un'iperbole passante per V e P .

Segue l'elenco delle operazioni eseguite con *CABRI*, per realizzare il disegno interattivo relativo al problema in esame:

Comando utilizzato	Specificazione	Oggetto costruito	Note
Retta	Per V	Retta r	Rappresenta la retta VC (fig. 2)
Retta	Per V	Retta s	Rappresenta la retta VE
Punto		Punto P	
Semiretta	Di origine Q	Semiretta q	

Punto su un oggetto	Sulla semiretta q	Punto R	Il punto R è mobile sulla semiretta q
Segmento		Segmento QR	La sua lunghezza rappresenta il rapporto $\frac{CD}{DE}$
Numero		Numero 1	
Trasporto di misura	Del numero 1 sul punto P	Punto J	
Circonferenza	Di centro P passante per J	Circonferenza γ	
Punto su un oggetto	Sulla circonferenza γ	Punto I	
Retta	Per P e I	Retta t	Il movimento di I su γ , fa ruotare t intorno al punto P
Intersezione di due oggetti	Della retta t con la retta r	Punto C	
Intersezione di due oggetti	Della retta t con la retta s	Punto E	
Compasso	Di centro C e raggio QR	Circonferenza α	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza α con la retta r	Punto L	
Trasporto di misura	Del numero 1 sul punto L	Punto U	
Circonferenza	Di centro L passante per U	Circonferenza α'	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza α' con la retta r	Punto M	
Segmento		Segmento ME	
Retta parallela	Al segmento ME passante per L	Retta h	
Intersezione di due oggetti	Della retta t con la retta h	Punto D	È un punto del luogo cercato ¹⁹⁶
Luogo	Descritto dal punto D e definito dal punto I		
Retta	Per P	Retta t' ¹⁹⁷	(fig. 3)

¹⁹⁶ In quanto, per una conseguenza del teorema di Talete, $CD : DE = CL : LM$ e per costruzione $CL = QR$ e $LM = 1$.

¹⁹⁷ Poiché il luogo non appare nella sua completezza, ho deciso di determinare due ulteriori suoi punti, per disegnare la conica passante per essi.

Intersezione di due oggetti	Della retta t' con la retta r	Punto C'	
Intersezione di due oggetti	Della retta t' con la retta s	Punto E'	
Compasso	Di centro C' e raggio QR	Circonferenza β	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza β con la retta r	Punto L'	
Trasporto di misura	Del numero 1 sul punto L'	Punto U'	
Circonferenza	Di centro L' passante per U'	Circonferenza β'	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza β' con la retta r	Punto M'	
Segmento		Segmento $M'E'$	
Retta parallela	Al segmento $M'E'$ passante per L'	Retta h'	
Intersezione di due oggetti	Della retta t' con la retta h'	Punto D'	È un punto del luogo cercato
Retta	Per P	Retta t''	
Intersezione di due oggetti	Della retta t'' con la retta r	Punto C''	
Intersezione di due oggetti	Della retta t'' con la retta s	Punto E''	
Compasso	Di centro C'' e raggio QR	Circonferenza δ	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza δ con la retta r	Punto L''	
Trasporto di misura	Del numero 1 sul punto L''	Punto U''	
Circonferenza	Di centro L'' passante per U''	Circonferenza δ'	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza δ' con la retta r	Punto M''	
Segmento		Segmento $M''E''$	
Retta parallela	Al segmento $M''E''$ passante per L''	Retta h''	
Intersezione di due oggetti	Della retta t'' con la retta h''	Punto D''	È un punto del luogo cercato
Conica	Per i punti V, P, D, D' e D''	Iperbole l	Rappresenta il luogo cercato

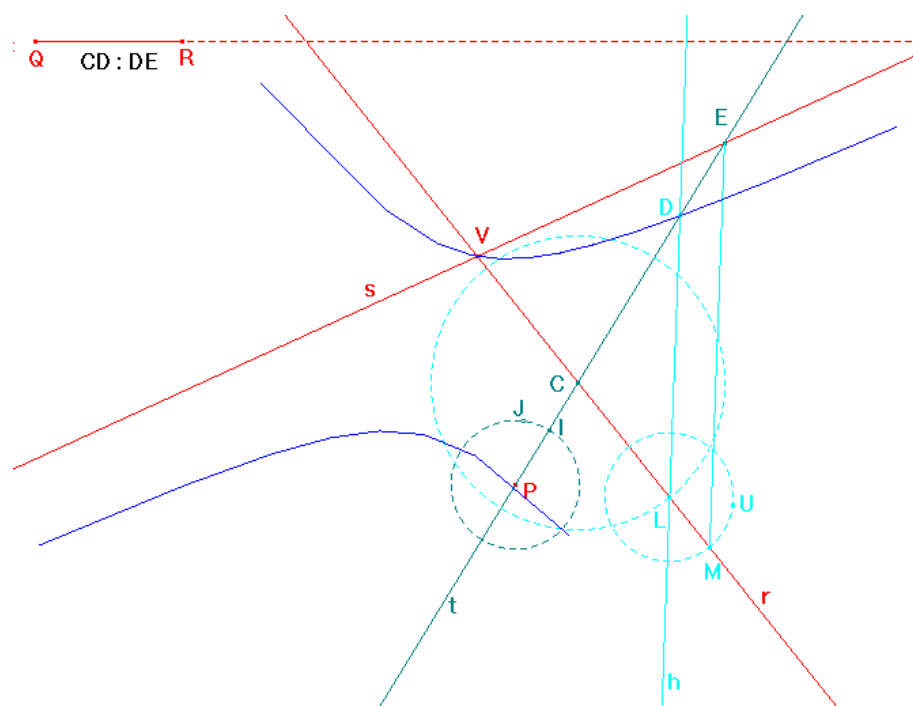


Figura 2

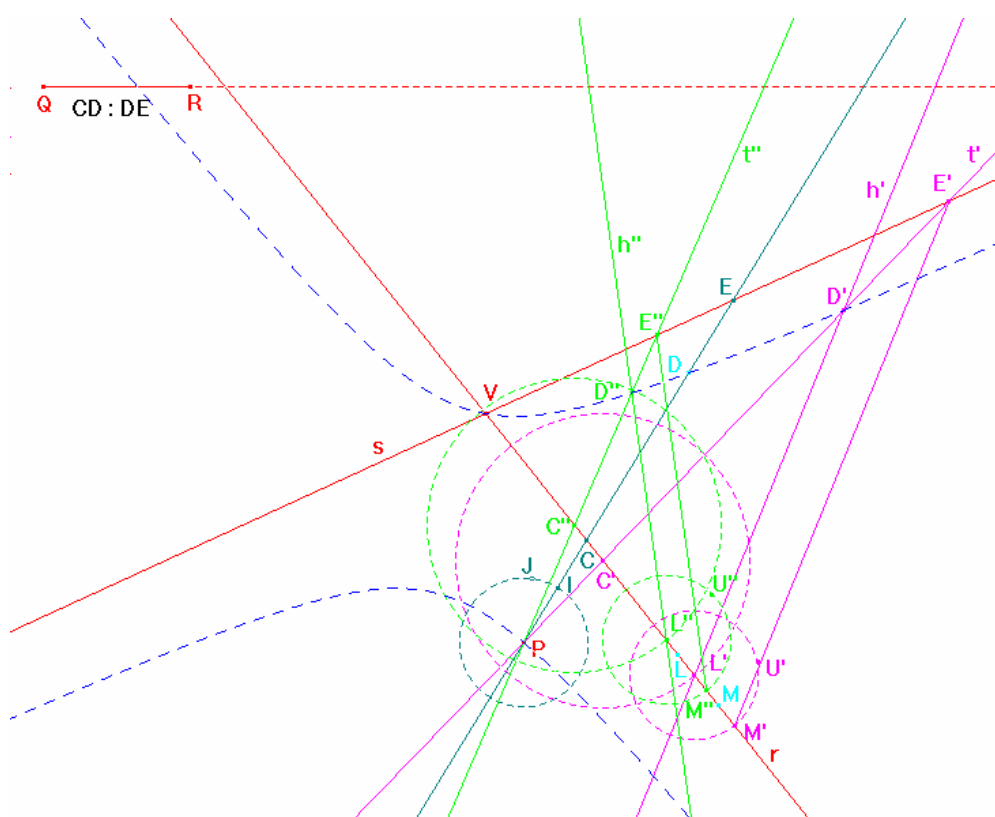


Figura 3

Nel disegno interattivo ho inserito una casella di testo in cui è indicato come interagire con la figura (fig. 4).

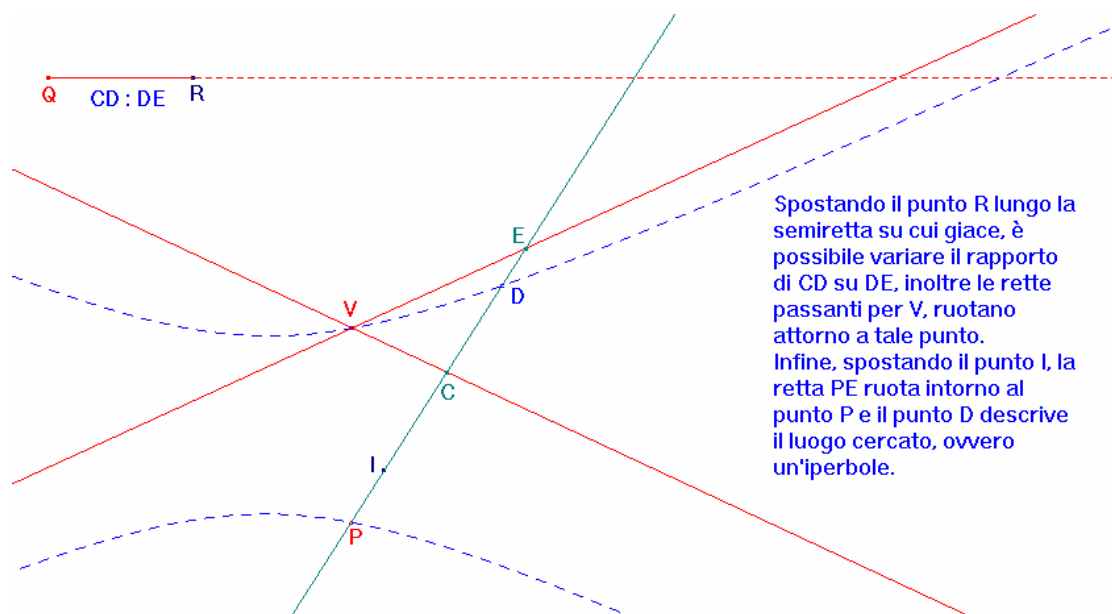


Figura 4

3.5 Problema XXXIX

Se da due punti dati di posizione A e B , si tracciano a un terzo punto qualunque C , due segmenti AC , BC , che sono tra loro in un rapporto qualsiasi, trovare il luogo del punto d'incontro C ¹⁹⁸.

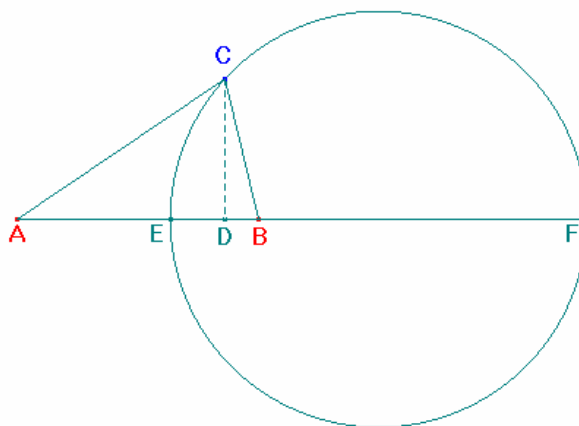


Figura 1

Condotta dal punto C la perpendicolare CD , alla retta AB , Newton sceglie come incognite $AD = x$ e $DC = y$, e, posto in accordo con i DATI di Euclide, $AB = a$ e $\frac{AC}{BC} = \frac{d}{e}$, determina l'equazione del luogo:

$$y = \sqrt{\frac{d^2 a^2 - 2d^2 ax}{e^2 - d^2} - x^2}.$$

Osservato che essa rappresenta un cerchio¹⁹⁹, egli conclude la risoluzione del problema affermando che, individuati due punti E e F , sulla retta AB , tali che $d : e :: AE : BE :: AF : BF$, il segmento EF è un diametro di tale cerchio.

Per realizzare un disegno interattivo relativo al problema in esame, dopo aver disegnato in un foglio di *CABRI*, due punti A e B , e la retta r passante per essi (fig. 2), ho disegnato una **semiretta** di origine Q , e un **segmento** QV , giacente su di essa, per rappresentare il

¹⁹⁸ Tale luogo è noto come *Cerchio di Apollonio*. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. V, p. 231, note 284 e 286.

¹⁹⁹ Nel sistema di coordinate cartesiane ortogonali DAC , di origine D , individuato dalla scelta delle incognite.

rapporto di AC su BC . Fatto ciò, poiché dalla proporzione $d : e = AF : BF$, si ottiene che

$$BF = AB \cdot \frac{e}{d - e} = AB \cdot \frac{1}{\frac{d}{e} - 1} \quad ^{200}, \text{ dopo aver } \mathbf{misurato} \text{ la lunghezza di } AB, \text{ ho } \mathbf{calcolato} \text{ il}$$

valore di BF . Sebbene per determinare F occorra trasportare BF sul punto B , in tal modo, su r , si individuano due punti che assumono alternativamente il ruolo del punto F . Osservato che, se la lunghezza di AC è maggiore di quella di BC , ovvero se il rapporto di d su e è maggiore di 1, il punto F è quello che giace sulla semiretta opposta alla semiretta BA , mentre in caso contrario, F è quello che giace sulla semiretta BA , dal momento che nel primo caso il valore calcolato di BF è positivo, mentre nel secondo è negativo, per eliminare l'indecisione e unificare i due casi, ho definito il **sistema di assi** cartesiani BJ_xJ_y , di origine B , avente semiasse negativo delle ascisse coincidente con la semiretta BA ²⁰¹, e ho individuato F , trasportando il valore di BF sull'asse delle ascisse.

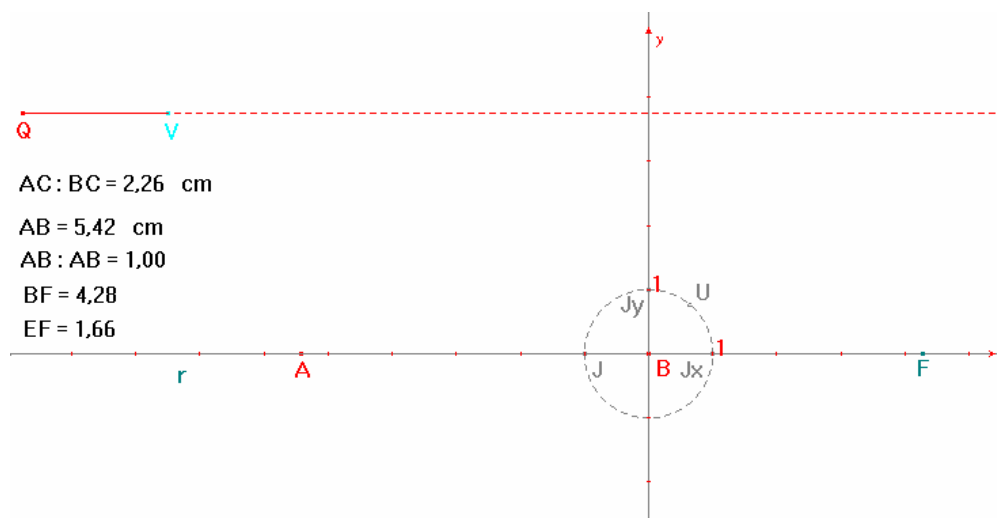


Figura 2

²⁰⁰ Applicando la proprietà dello scomporre, si ha $d - e : e = AF - BF (= AB) : BF$.

²⁰¹ Per definire il sistema di assi, dopo aver riportato un segmento di lunghezza unitaria sul punto B , individuando un punto U , ho disegnato il **simmetrico** Jx , del **punto d'intersezione** J , del **cerchio** di centro B passante per U , con la **semiretta** BA , e il **punto d'intersezione** Jy , dello stesso cerchio con la **retta perpendicolare** a r , passante per B . Per determinare l'unità di misura degli assi, ho **calcolato** il rapporto della lunghezza di AB su se stessa, che non è mai nulla, in quanto i punti A e B non possono coincidere. Il motivo per cui non ho usato il comando **numeri**, consiste nell'esigenza di non introdurre nuovi elementi nella costruzione, al fine di creare una *macro* relativa al problema in esame, i cui oggetti iniziali sono soltanto i punti A e B , e il segmento QV che rappresenta il rapporto di AC su BC .

$$BE = AB \cdot \frac{e}{d+e} = AB \cdot \frac{1}{\frac{d}{e}+1} \quad ^{202}, \text{ dopo aver } \mathbf{calcolato} \text{ il valore di } BE, \text{ l'ho } \mathbf{trasportato} \text{ sul}$$

$AC : BC = 2,26 \text{ cm}$
 $AB = 5,42 \text{ cm}$
 $AB : AB = 1,00$
 $BF = 4,28$
 $EF = 1,66$

Nel caso particolare in cui AC è uguale a BC , il luogo descritto da C non è un cerchio, bensì l'asse del segmento AB . Poiché con lo spostamento del punto V sulla semiretta QV , al fine di visualizzare il luogo in tale eventualità, non si ottiene l'effetto desiderato, nel disegno interattivo che illustra il problema in esame ho disegnato l'asse del segmento AB , giustificandone la presenza nella casella di testo in cui ho indicato quali sono gli oggetti mobili e come possono essere spostati (fig. 4).

²⁰³ In tal caso non ci sono ambiguità.

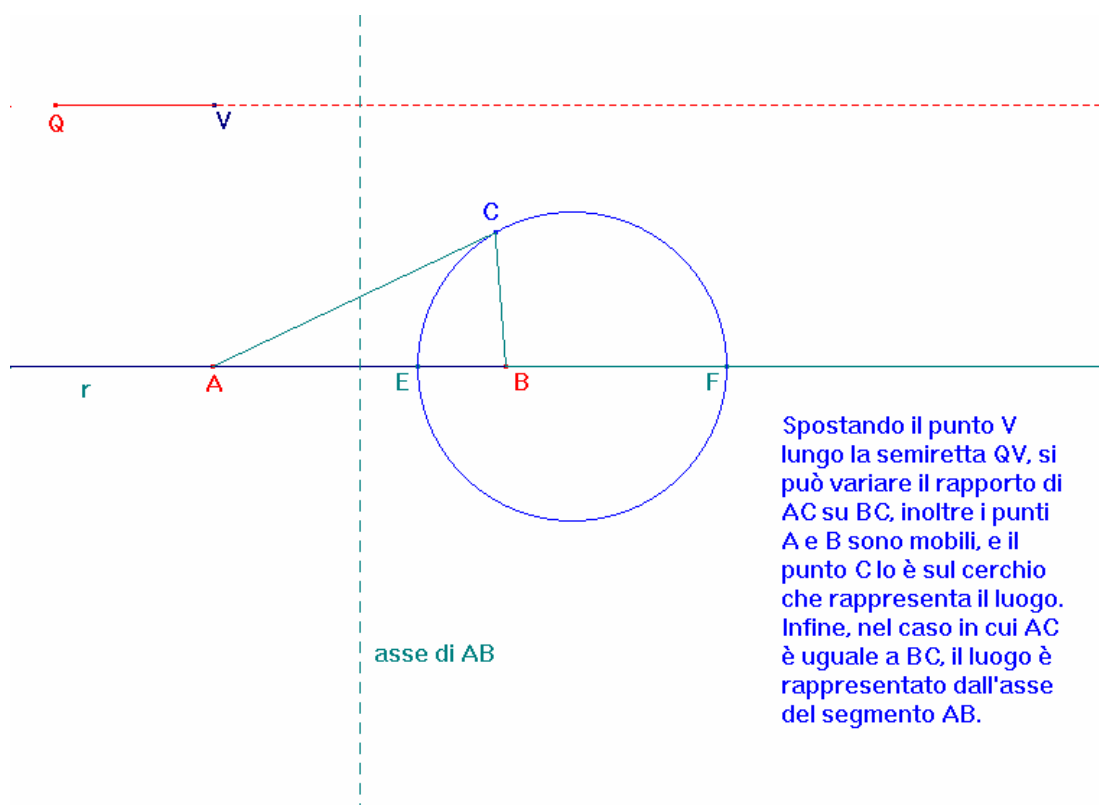


Figura 4

Infine, poiché tale luogo è utile per la costruzione del Problema XXVII²⁰⁴, ho definito la *macro* **Cerchio di Apollonio**, evidenziando i punti A e B, e il segmento QV, come oggetti iniziali, e il cerchio che rappresenta il luogo come oggetto finale.

²⁰⁴ Paragrafo 1.5.

3.6 Problema LVII

Se un angolo dato CAD , non ha che la facoltà di girare attorno al punto A dato di posizione; e l'angolo dato CBD , non abbia pure che un movimento possibile, di rotazione attorno al punto B dato di posizione; e se i due angoli ruotano in effetti secondo questa legge, supponendo inoltre, che i lati AD , BD si taglino sempre in una linea retta EF data di posizione, determinare la curva che descriverà l'ulteriore intersezione C degli altri due lati AC , BC .

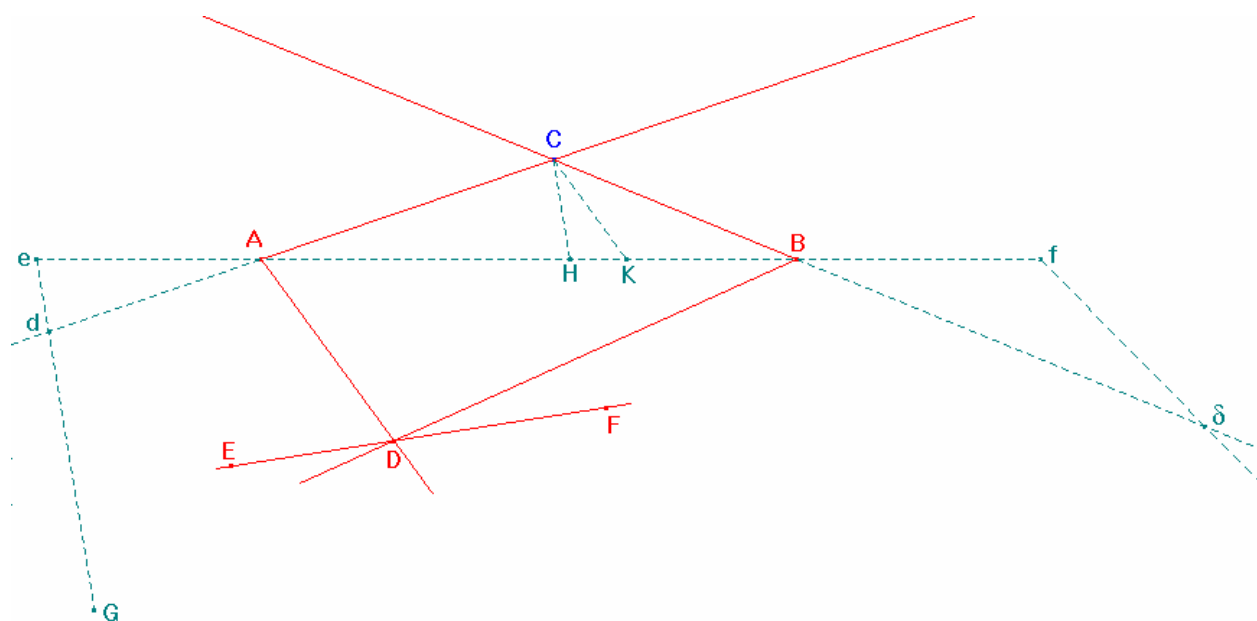


Figura 1

Estesi CA e CB , rispettivamente fino ai punti d e δ , tali che $Ad = AD$ e $B\delta = BD$, e individuati gli angoli Ade e $B\delta f$, uguali rispettivamente agli angoli ADE e BDF , Newton estende ed fino al punto G , tale che $dG = \delta f$, e, disegna CH e CK , parallele rispettivamente a ed e δf , pone $Ae = a$, $eG = b$, $Bf = c$, $AB = m$ e $\frac{CK}{CH} = \frac{d}{e}$. Scelte poi come incognite $BK = x$ e $CK = y$, determina per il luogo l'equazione $y^2 = \frac{2p}{f} - xy + \frac{dm}{f}y + \frac{bd}{fc}x^2 - \frac{bdm}{fc}x$, e conclude che essa rappresenta un'iperbole, se

$$\frac{bd}{fc} > 0 \text{ oppure } \frac{bd}{fc} < -\frac{p^2}{f^2}, \text{ una parabola, se } \frac{bd}{fc} = -\frac{p^2}{f^2}, \text{ e un cerchio, o un'ellisse, se } -\frac{p^2}{f^2} < \frac{bd}{fc} < 0.$$

Segue l'elenco delle operazioni eseguite con *CABRI*, per realizzare il disegno interattivo relativo al problema in esame:

<i>Comando utilizzato</i>	<i>Specificazione</i>	<i>Oggetto costruito</i>	<i>Note</i>
Retta	Per O e O'	Retta r	Non appare in quanto è stata nascosta (●) (fig. 2)
Numero		Numero 1	(●)
Trasporto di misura	Del numero 1 sul punto O	Punto K	
Trasporto di misura	Del numero 1 sul punto O'	Punto K'	
Circonferenza	Di centro O passante per K	Circonferenza γ	
Circonferenza	Di centro O' passante per K'	Circonferenza γ'	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza γ con la retta r	Punto J	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza γ' con la retta r	Punto J'	
Misura dell'angolo	Individuato dai punti J , O e K		Rappresenta la misura dell'angolo <i>CAD</i>
Misura dell'angolo	Individuato dai punti J' , O' e K'		Rappresenta la misura dell'angolo <i>CBD</i>
Retta	Per Z	Retta s	
Punto su un oggetto	Sulla retta s	Punto D	
Punto		Punto A	
Punto		Punto B	
Retta	Per A e D	Retta t	
Retta	Per B e D	Retta t'	
Trasporto di misura	Del numero 1 sul punto A	Punto U	
Trasporto di misura	Del numero 1 sul punto B	Punto U'	

Circonferenza	Di centro A passante per U	Circonferenza α	
Circonferenza	Di centro B passante per U'	Circonferenza α'	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza α con la retta t	Punto L	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza α' con la retta t'	Punto G	
Trasporto di misura	Dell'angolo JOK , sulla circonferenza α , dal punto L	Punto M	
Trasporto di misura	Dell'angolo $J'O'K'$, sulla circonferenza α' , dal punto G	Punto n	
Simmetria assiale	Del punto n rispetto alla retta t'	Punto N	
Retta	Per A e M	Retta h	
Retta	Per B e N	Retta h'	
Intersezione di due oggetti	Della retta h , con la retta h'	Punto C	
Luogo	Descritto dal punto C e definito dal punto D		
Punto su un oggetto	Sulla retta s	Punto D' ²⁰⁵	(fig. 3)
Retta	Per A e D'	Retta g	
Retta	Per B e D'	Retta g'	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza α con la retta g	Punto L'	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza α' con la retta g'	Punto G'	
Trasporto di misura	Dell'angolo JOK , sulla circonferenza α , dal punto L'	Punto M'	
Trasporto di misura	Dell'angolo $J'O'K'$, sulla circonferenza α' , dal punto G'	Punto n'	
Simmetria assiale	Del punto n' rispetto alla retta g'	Punto N'	
Retta	Per A e M'	Retta v	
Retta	Per B e N'	Retta v'	

²⁰⁵ Poiché il luogo non appare nella sua completezza, ho deciso di determinare due ulteriori suoi punti C' e C'' , per poter disegnare la conica passante per essi, e per i punti A e B .

Intersezione di due oggetti	Della retta v , con la retta v'	Punto C'	
Punto su un oggetto	Sulla retta s	Punto D''	
Retta	Per A e D''	Retta b	
Retta	Per B e D''	Retta b'	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza α con la retta b	Punto L''	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza α' con la retta b'	Punto G''	
Trasporto di misura	Dell'angolo JOK , sulla circonferenza α , dal punto L''	Punto M''	
Trasporto di misura	Dell'angolo $J'O'K'$, sulla circonferenza α' , dal punto G''	Punto n''	
Simmetria assiale	Del punto n'' rispetto alla retta g'	Punto N''	
Retta	Per A e M''	Retta d	
Retta	Per B e N''	Retta d'	
Intersezione di due oggetti	Della retta d , con la retta d'	Punto C''	
Conica	Per i punti A, B, C, C' e C''	Conica \mathcal{C}	Rappresenta il luogo cercato

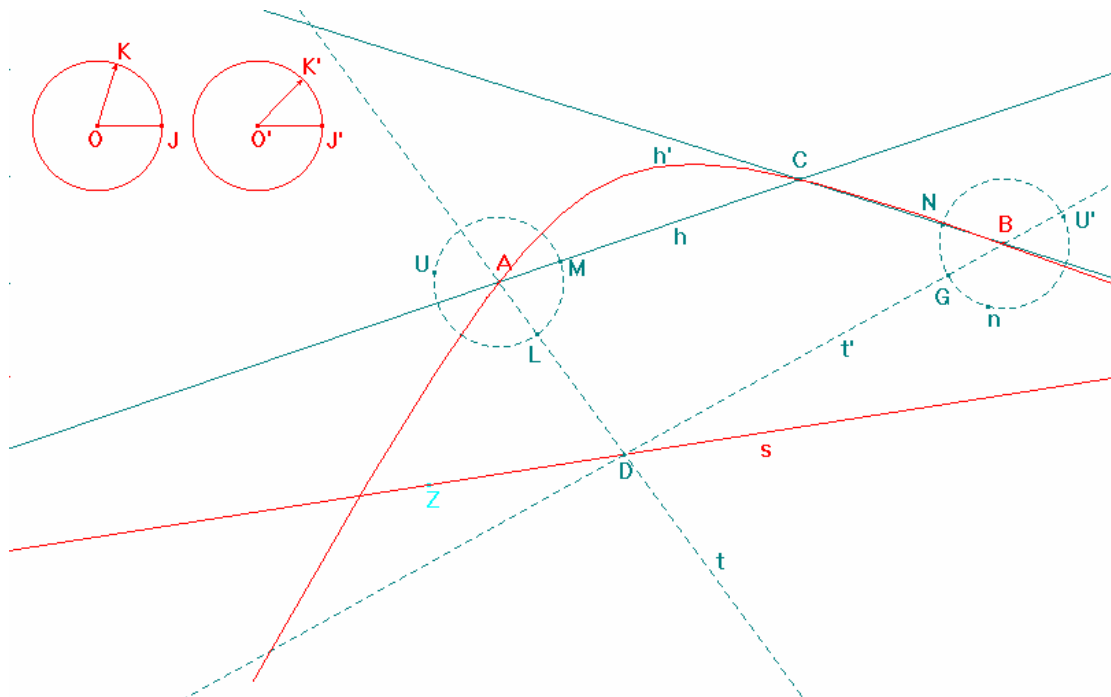


Figura 2

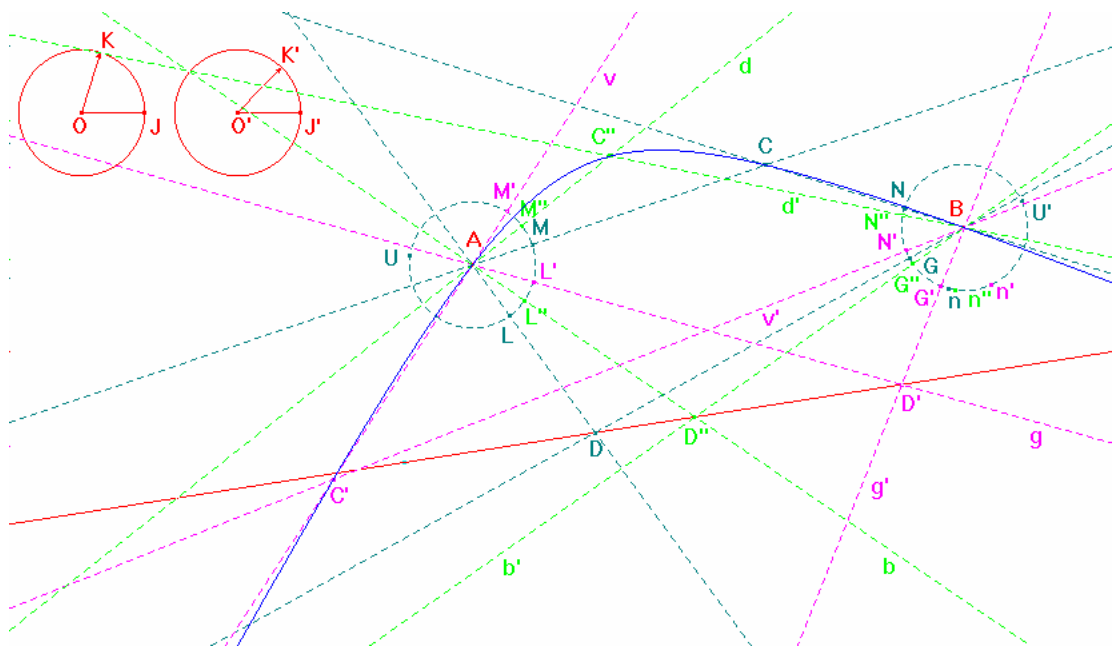


Figura 3

Nel disegno interattivo ho inserito una casella di testo in cui è indicato come interagire con la figura.

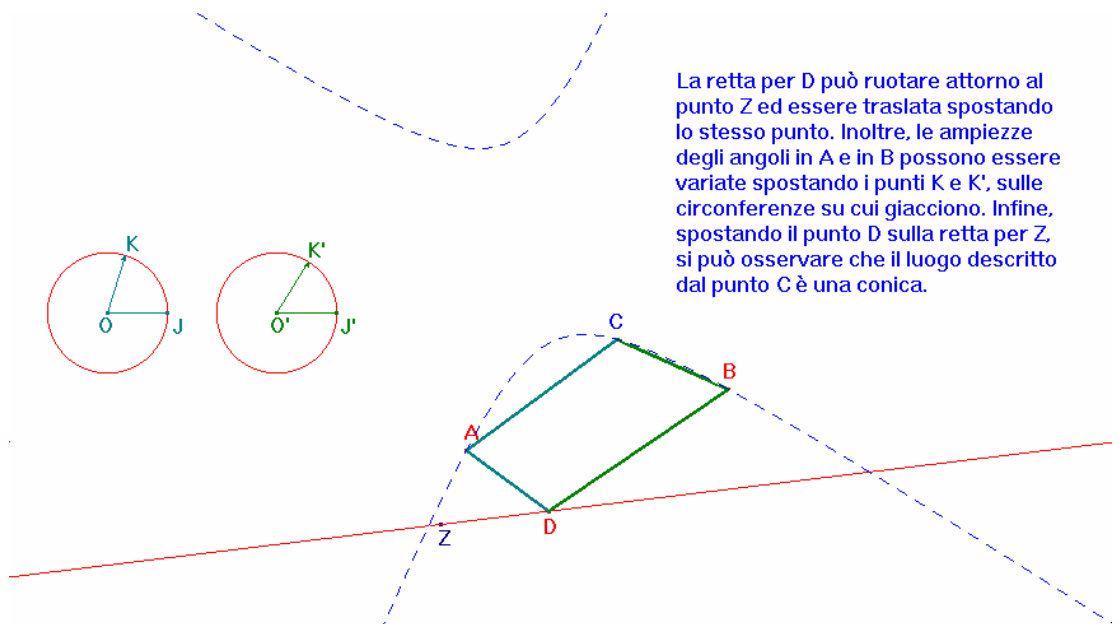


Figura 4

4

Costruzioni ottenute mediante la “costruzione” dell’equazione risolvente

Nel presente capitolo è descritta la costruzione delle immagini interattive relative ai problemi per i quali Newton ha proposto la costruzione geometrica dell’equazione risolvente, ovvero la costruzione geometrica di segmenti di lunghezza uguale alle radici di tale equazione.

Sebbene l’immagine interattiva relativa al problema XLIII sia stata costruita mediante una risoluzione geometrica, nel paragrafo 1.6 è stata descritta la costruzione dell’equazione risolvente, cui Newton ha ridotto il problema, proposta da Beaudoux in una delle note esplicative che corredano l’edizione francese dell’*Arithmetica Universalis*.

4.1 Problema V

Dati la base AB di un triangolo rettangolo, e la somma della perpendicolare e dei lati $CA+CB+CD$, trovare il triangolo.

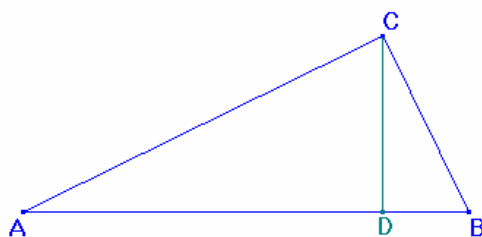


Figura 1

Del presente problema, Newton propone due diversi metodi di risoluzione, che si differenziano per la scelta delle incognite e per il loro numero. In particolare, posto $CA+CB+CD=a$ e $AB=b$, il primo di tali metodi consiste nella scelta delle incognite $CD=x$ e $AC-CB=y$, che conduce al sistema di secondo grado costituito dalle equazioni $\frac{a^2-2ax+x^2+y^2}{2}=b^2$ e $\frac{a^2-2ax+x^2-y^2}{4}=bx$, invece il secondo, consiste nella scelta della sola incognita $AC=x$, che permette di giungere all'equazione di secondo grado $x^2+bx+b^2+ab=(x+b)\sqrt{2ab+2b^2}$ (♠), ed è corredato dalla costruzione geometrica delle radici :

$$x = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} \pm \sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab}$$

dell'equazione risolvete. Tale costruzione si basa sull'individuazione di segmenti allineati, aventi lunghezza uguale a una delle tre parti di cui è composta ciascuna delle suddette radici. Più precisamente, considerati due segmenti adiacenti $AB=\frac{1}{2}b$ e $CB=\frac{1}{2}a$, e un

segmento $CD = \frac{1}{2} AB$, adiacente a CB , Newton determina il medio proporzionale AE , tra b e AC , e afferma che i due segmenti BF , ottenuti riportando il medio proporzionale EF , tra b e DE , da ambedue le parti sul punto B , sono uguali alle radici dell'equazione (\spadesuit), e quindi ai lati del triangolo²⁰⁶.

Sebbene tali radici possano essere determinate con l'ausilio della calcolatrice interattiva di *CABRI*, data la semplicità della costruzione sopraindicata, ho scelto di realizzare il disegno interattivo relativo al problema in considerazione, determinando con essa i lati del triangolo cercato. In particolare, dopo aver disegnato un **segmento** AB (fig. 2), ho completato la costruzione dei dati iniziali disegnando una **semiretta** di origine Q , e un **segmento** QR , su di essa, che rappresenta la somma di CA , CB e CD . Fatto ciò, ho determinato il **punto medio** M , del segmento AB , e ho **riportato** il **segmento** AM , su un'altra **semiretta**, di origine A' , individuando su di essa il **punto** B' ²⁰⁷. Determinati poi, il **punto medio** T , di QR , e il **punto medio** I di $A'B'$, ho **riportato** il **segmento** QT sul punto B' , individuando il **punto** C' sulla semiretta $A'B'$ ²⁰⁸, e successivamente il **segmento** AI sul punto C' , individuando il **punto** D' sulla stessa semiretta²⁰⁹. A questo punto, con la *macro* **Medio proporzionale**²¹⁰, applicata al segmento AB e al **segmento** $A'C'$, ho determinato il segmento $C'G$, e, **riportando** tale segmento sul punto A' , ho individuato il **punto** E su $A'B'$ ²¹¹. Applicata ancora la *macro* **Medio proporzionale**, al segmento AB e al segmento $D'E$, ho determinato il segmento $D'H$, e, **riportato** tale segmento su B' , ho determinato i **punti** F e F' , e quindi i **segmenti** $B'F$ e $B'F'$, che rappresentano i lati AC e BC del triangolo cercato.

²⁰⁶ Il fatto che le radici siano due, non implica l'esistenza di due diversi triangoli che soddisfano le condizioni del problema, in quanto, la relazione esistente tra i lati di un triangolo rettangolo fa sì che, supposta la misura di AC uguale a una delle due radici, la misura di BC sia uguale all'altra. Paragrafo 5.1, nota 222.

²⁰⁷ $A'B' = \frac{1}{2}b$

²⁰⁸ $C'B' = QT = \frac{1}{2}a$

²⁰⁹ $C'D' = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}b$

²¹⁰ Paragrafo 1.6.

²¹¹ In tal modo $A'E$ è medio proporzionale tra b e $A'C'$.

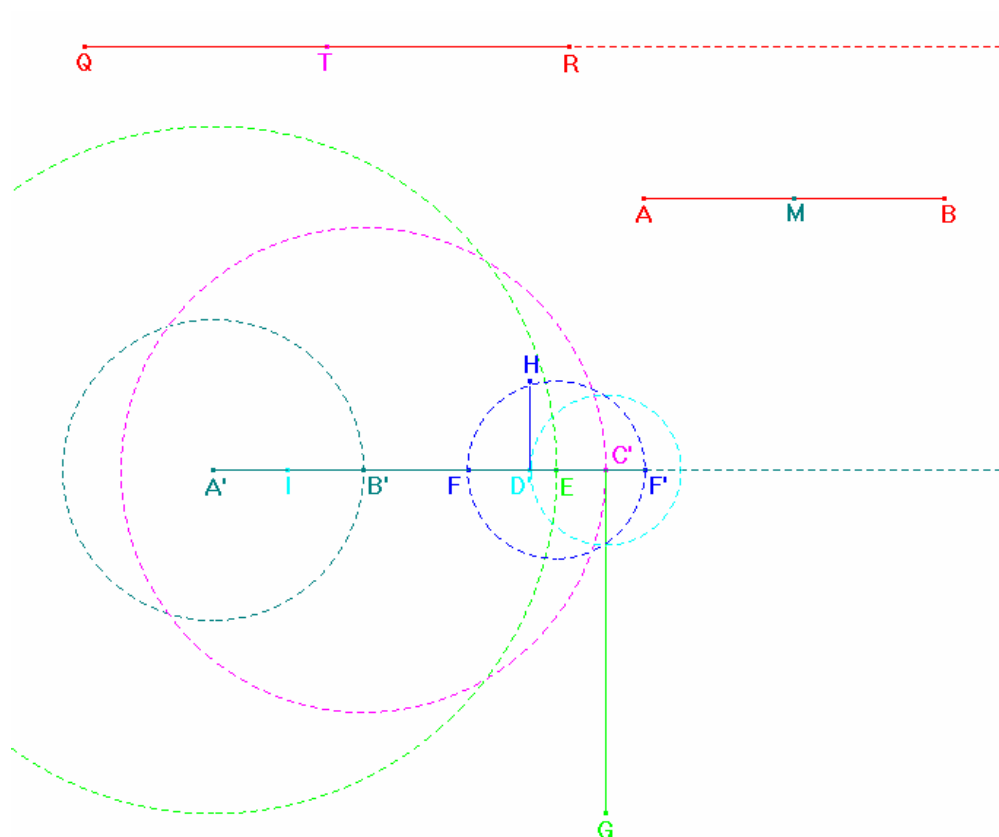


Figura 2

Per ultimare la costruzione, ho **riportato** poi i segmenti $B'F$ e $B'F'$, rispettivamente sul punto B e sul punto A (fig. 3), e, individuato così il **punto** C , ho disegnato il **triangolo** ABC , che soddisfa le condizioni richieste dal problema.

Infine, dal momento che la figura costruita illustra in modo esauriente il problema esaminato, ho inserito in essa una casella di testo in cui è indicato quali sono gli oggetti mobili e come possono essere spostati (fig. 4).

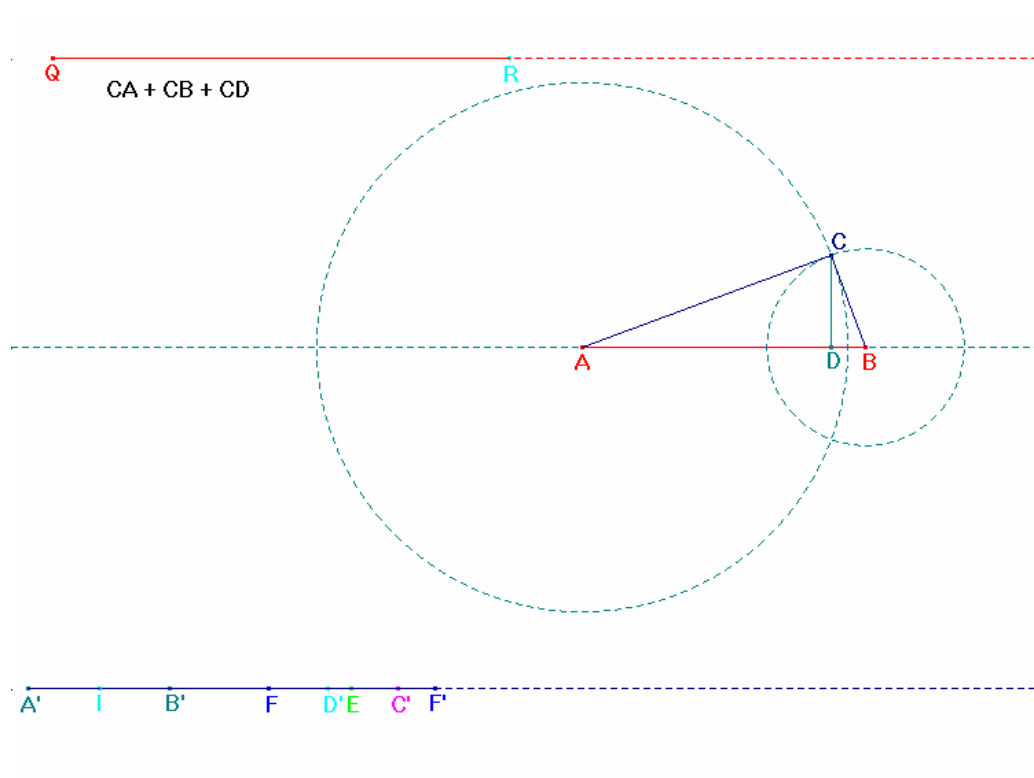
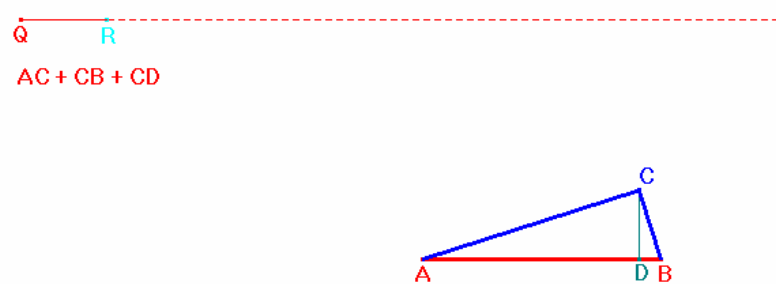


Figura 3



I punti A e B sono mobili,
inoltre spostando il punto
R sulla semiretta QR è
possibile variare la
somma dei lati AC e CB, e
dell'altezza CD.

Figura 4

4.2 Problema VI

Dati un triangolo rettangolo ABC, la somma dei lati AC + BC, e la perpendicolare CD, trovare il triangolo.

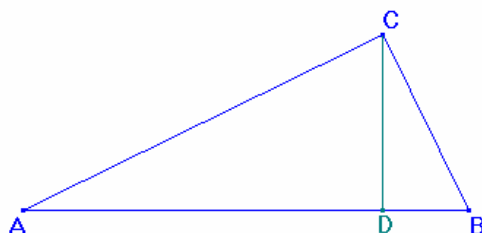


Figura 1

Come per il Problema V, Newton propone due diverse risoluzioni che si differenziano per la scelta delle incognite e per il loro numero. In particolare, posto $AC + BC = a$ e $CD = b$, egli in un primo momento sceglie la sola incognita $AC = x$, riducendo il problema

all'equazione di quarto grado $x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 - 2b^2x^2 + 2ab^2x + b^4 = a^2b^2 + b^4$, riducibile nel

prodotto delle equazioni $x^2 - ax - b^2 = -b\sqrt{a^2 + b^2}$ e $x^2 - ax - b^2 = +b\sqrt{a^2 + b^2}$ ²¹², e in seguito, sceglie come incognite $AC - BC = y$ e $AB = x$, giungendo al sistema di quarto

$$\text{grado} \begin{cases} y^2 = 2x^2 - a^2 \\ y^2 = a^2 - 4bx \end{cases}.$$

La prima risoluzione è seguita dalla costruzione geometrica delle radici

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ dell'equazione } x^2 - ax - b^2 = -b\sqrt{a^2 + b^2}, \text{ che, come nel}$$

problema precedente, è basata sull'individuazione di segmenti aventi lunghezza uguale alle parti di cui è composta ciascuna delle anzidette radici. Più precisamente, considerati due

²¹² L'equazione $x^2 - ax - b^2 = +b\sqrt{a^2 + b^2}$, non dà luogo ad alcuna soluzione in quanto una delle sue radici è negativa.

segmenti adiacenti $AB = BC = \frac{1}{2}a$, e determinato un segmento $CD = b$, a essi perpendicolare, Newton estende CD fino al punto E , in modo che $DE = DA$, e afferma che, determinato il medio proporzionale CF , tra CD e CE , e detti G e H , i punti d'intersezione della retta BC , con il cerchio di centro F e raggio BC , i segmenti BG e BH , sono uguali ai lati del triangolo²¹³.

Anche in questo caso ho scelto di realizzare il disegno interattivo relativo al problema in considerazione, costruendo le radici dell'equazione risolvente, pertanto, dopo aver disegnato gli enti geometrici che rappresentano i dati iniziali, ho eseguito con *CABRI* la costruzione indicata da Newton. In particolare, disegnate una **semiretta** di origine Q , e una **semiretta** di origine P , ho rappresentato CD mediante il **segmento** QR , giacente sulla prima, e la somma di AC e CB mediante il **segmento** PL , giacente sulla seconda (fig. 2). In seguito, ho determinato il **punto medio** M , del segmento PL , e, **riportando** il **segmento** PM , su un'altra **semiretta** di origine A' , ho individuato su di essa il **punto** B' , e quindi il **simmetrico** C' , di A' rispetto a B' . A questo punto, condotta da C' , la **retta perpendicolare** t , alla semiretta $A'B'$, ho individuato su di essa il **punto** D' , **riportando** il segmento QR sul punto C' , e quindi il **punto** E , mediante l'intersezione di t con il **cerchio** di centro D' , passante per A' . Fatto ciò, dopo aver determinato, con la *macro* **Medio proporzionale**, applicata ai **segmenti** $C'D'$ e $C'E$, il segmento $C'I$, ho individuato uno dei due **punti d'intersezione** F , del **cerchio** di centro C' passante per I , con t , e, **riportando** sul punto F , il segmento $B'C'$, ho poi individuato i **punti** G e H , su $A'B'$, e quindi i due **segmenti** $B'G$ e $B'H$, che rappresentano i lati AC e BC del triangolo cercato.

²¹³ Come nel Problema V, il fatto che le radici siano due non implica l'esistenza di due diversi triangoli che soddisfano le condizioni del problema, in quanto, la relazione esistente tra i lati di un triangolo rettangolo fa sì che supposta la misura di AC uguale a una delle due radici, la misura di BC sia uguale all'altra. Paragrafo 5.2, nota 223.

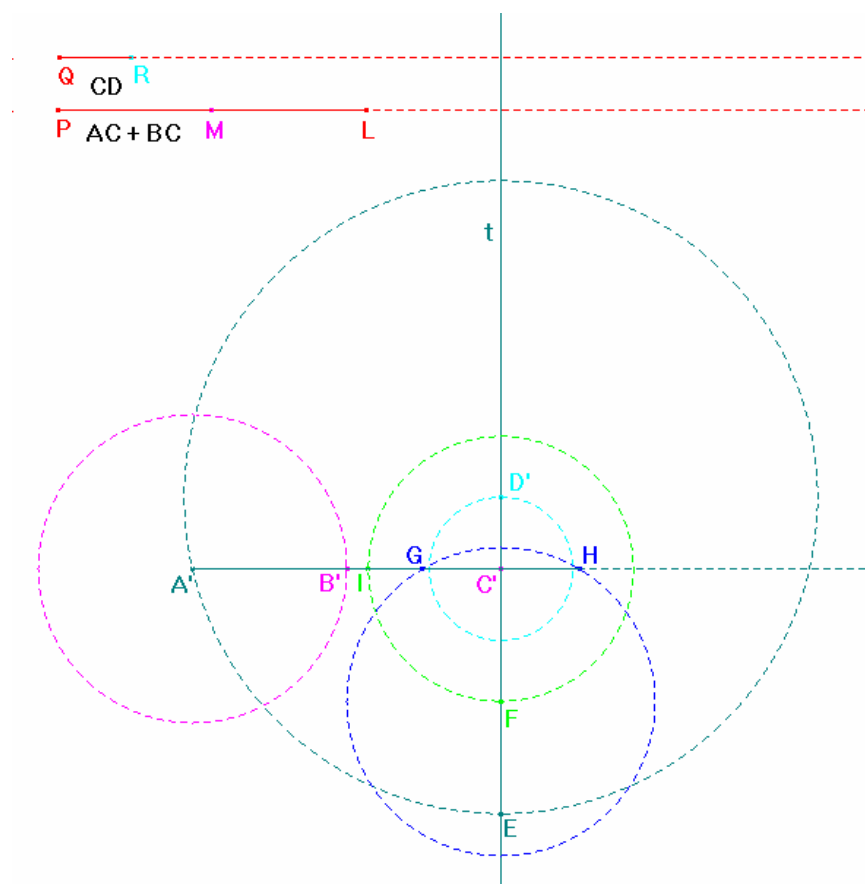


Figura 2

Per completare la costruzione, dopo aver disegnato una **retta** r , e un **punto** D , su di essa (fig. 3), ho condotto da D , la **retta perpendicolare** a r , e ho **riportato** il segmento QR sul punto D , per individuare il **punto** C , ovvero il **vertice** del triangolo cercato. **Riportando** poi, i segmenti BG e BH , sul punto C , ho individuato su r i **punti** A e B , e successivamente ho disegnato il **triangolo** ABC , che soddisfa le condizioni richieste dal problema. Infine, dal momento che la figura costruita illustra in modo completo il problema esaminato, ho ivi inserito una casella di testo in cui è indicato come interagire con essa (fig. 4).



4.3 Problema VII

Date in un triangolo rettangolo, la somma dei lati, e la somma della perpendicolare e della base, trovare il triangolo.

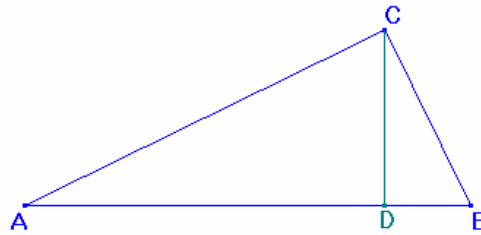


Figura 1

Per risolvere il problema, posto $AC + CB = a$ e $AB + CD = b$, Newton sceglie come incognite $AC = x$ e $AB = y$, e riduce il problema al sistema di quarto grado costituito dalle equazioni $y^2 = a^2 - 2ax + 2x^2$ e $by = a^2 - ax + x^2$. Tuttavia, dal momento che la sola conoscenza dei lati AC e BC consente di determinare il triangolo cercato, si limita a risolvere l'equazione risolvente del sistema, nella variabile x ,

$$x^4 - 2ax^3 + 3a^2 \begin{Bmatrix} x^2 & -2a^3 \\ -2b^2 & +2ab^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x & +a^4 \\ -a^2b^2 & \end{Bmatrix} = 0, \text{ che è riducibile nel prodotto delle equazioni di}$$

secondo grado $x^2 - ax + a^2 - b^2 = -b\sqrt{b^2 - a^2}$ e $x^2 - ax + a^2 - b^2 = +b\sqrt{b^2 - a^2}$ ²¹⁴. E, alla fine della risoluzione, descrive la costruzione geometrica delle radici

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b^2 - \frac{3}{4}a^2 - b\sqrt{b^2 - a^2}}, \text{ dell'equazione } x^2 - ax + a^2 - b^2 = -b\sqrt{b^2 - a^2}, \text{ che}$$

consiste nel determinare il medio proporzionale R , tra $b + a$ e $b - a$, il medio proporzionale

²¹⁴ L'equazione $x^2 - ax + a^2 - b^2 = +b\sqrt{b^2 - a^2}$, non dà luogo ad alcuna soluzione in quanto una delle sue radici è negativa.

S , tra R e $b - R$, il medio proporzionale T , tra $\frac{1}{2}a + S$ e $\frac{1}{2}a - S$, e quindi $\frac{1}{2}a + T$ e $\frac{1}{2}a - T$, che rappresentano i lati del triangolo cercato²¹⁵.

Segue l'elenco delle operazioni eseguite con *CABRI*, per realizzare il disegno interattivo relativo al problema in esame:

<i>Comando utilizzato</i>	<i>Specificazione</i>	<i>Oggetto costruito</i>	<i>Note</i>
Semiretta	Di origine Q	Semiretta q	(fig. 2)
Semiretta	Di origine P	Semiretta q'	
Punto su un oggetto	Sulla semiretta q	Punto R	Il punto R è mobile sulla semiretta q
Punto su un oggetto	Sulla semiretta q'	Punto L	Il punto L è mobile sulla semiretta q'
Segmento		Segmento QR	La sua lunghezza rappresenta $AC + BC$, ovvero a
Segmento		Segmento PL	La sua lunghezza rappresenta $AB + CD$, ovvero b
Semiretta	Di origine A'	Semiretta r	
Compasso	Di centro A' e raggio QR	Circonferenza γ	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza γ con la semiretta r	Punto B'	$A'B' = a$
Compasso	Di centro B' e raggio PL	Circonferenza γ'	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza γ' con la semiretta r	Punto C'	$B'C' = b$
Simmetria centrale	Del punto B' rispetto al punto A'	Punto F	
Semiretta	Di origine A' passante per F	Semiretta r'	

²¹⁵ Il fatto che le radici siano due, non implica l'esistenza di due diversi triangoli che soddisfano le condizioni del problema, in quanto, la relazione esistente tra i lati di un triangolo rettangolo fa sì che, supposta la misura di AC uguale a una delle due radici, la misura di BC sia uguale all'altra.

Intersezione di due oggetti	Della circonferenza γ' con la semiretta r'	Punto D'	La circonferenza γ' interseca la semiretta r' , soltanto se $a < b$, pertanto il punto D' esiste solo in tale eventualità ²¹⁶
Segmento		Segmento $A'C'$	Rappresenta $b + a$
Segmento		Segmento $A'D'$	Rappresenta $b - a$
Macro: Medio proporzionale	Tra il segmento $A'C'$ e il segmento $A'D'$	Segmento $A'E$	Rappresenta $R = \sqrt{(b+a) \cdot (b-a)} = \sqrt{b^2 - a^2}$
Compasso	Di centro C' e raggio $A'E$	Circonferenza α	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza α con la semiretta r	Punto G	
Segmento		Segmento $B'G$	Rappresenta $b - R$
Macro: Medio proporzionale	Tra il segmento $A'E$ e il segmento $B'G$	Segmento $A'H$	Rappresenta $S = \sqrt{b\sqrt{b^2 - a^2} + a^2 - b^2}$ ²¹⁷
Punto medio	Tra il punto A' e il punto B'	Punto I	
Segmento		Segmento $A'I$	Rappresenta $\frac{1}{2}a$
Semiretta	Di origine H passante per F	Semiretta s	
Circonferenza	Di centro A' passante per I	Circonferenza δ	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza δ con la semiretta s	Punto J	La circonferenza δ interseca la semiretta s , soltanto se $\frac{1}{2}a > S$, pertanto il punto J esiste solo in tal caso ²¹⁸
Segmento		Segmento HJ	Rappresenta $\frac{1}{2}a + S$

²¹⁶ Questa restrizione è conseguenza del fatto che, in ogni triangolo rettangolo, la somma dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa, è maggiore della somma dei cateti.

²¹⁷
$$S = \sqrt{\left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right)\sqrt{b^2 - a^2}} = \sqrt{b\sqrt{b^2 - a^2} + a^2 - b^2}$$

²¹⁸ Se $\frac{1}{2}a$ è minore o uguale a S , il problema non ammette soluzioni.

Segmento		Segmento JH	Rappresenta $\frac{1}{2}a - S$
Macro: Medio proporzionale	Tra il segmento HI e il segmento JH	Segmento IK	Rappresenta $T = \sqrt{b^2 - \frac{3}{4}a^2 - b\sqrt{(b^2 - a^2)}}^{219}$
Compasso	Di centro A' e raggio IK	Circonferenza β	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza β con la semiretta r	Punto V	
Segmento		Segmento JV	Rappresenta $\frac{1}{2}a + T$, ovvero la lunghezza di uno dei lati del triangolo ABC (fig. 3)
Segmento		Segmento VI	Rappresenta $\frac{1}{2}a - T$, ovvero la lunghezza di uno dei lati del triangolo ABC
Retta	Per il punto T	Retta h	
Compasso	Di centro T e raggio VI	Circonferenza ϵ	
Compasso	Di centro T e raggio JV	Circonferenza ϵ'	
Retta perpendicolare	Alla retta h passante per T	Retta t	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza ϵ con la retta h	Punto A	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza ϵ' con la retta t	Punto N	
Segmento		Segmento AN	Rappresenta l'ipotenusa del triangolo cercato
Circonferenza	Di centro A passante per N	Circonferenza η	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza η con la retta h	Punto B	

$$\begin{aligned}
^{219} T &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}a + \sqrt{b\sqrt{(b^2 - a^2)} + a^2 - b^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a - \sqrt{b\sqrt{(b^2 - a^2)} + a^2 - b^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b\sqrt{(b^2 - a^2)} - a^2 + b^2} = \\
&= \sqrt{b^2 - \frac{3}{4}a^2 - b\sqrt{(b^2 - a^2)}}.
\end{aligned}$$

Circonferenza	Di centro A passante per T	Circonferenza τ	
Punto medio	Tra il punto A e il punto B	Punto M	
Circonferenza	Di centro M passante per A	Circonferenza τ'	
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza τ con la circonferenza τ'	Punto C	
Triangolo	Di vertici i punti A , B e C	Triangolo ABC	Rappresenta il triangolo che soddisfa le condizioni del problema

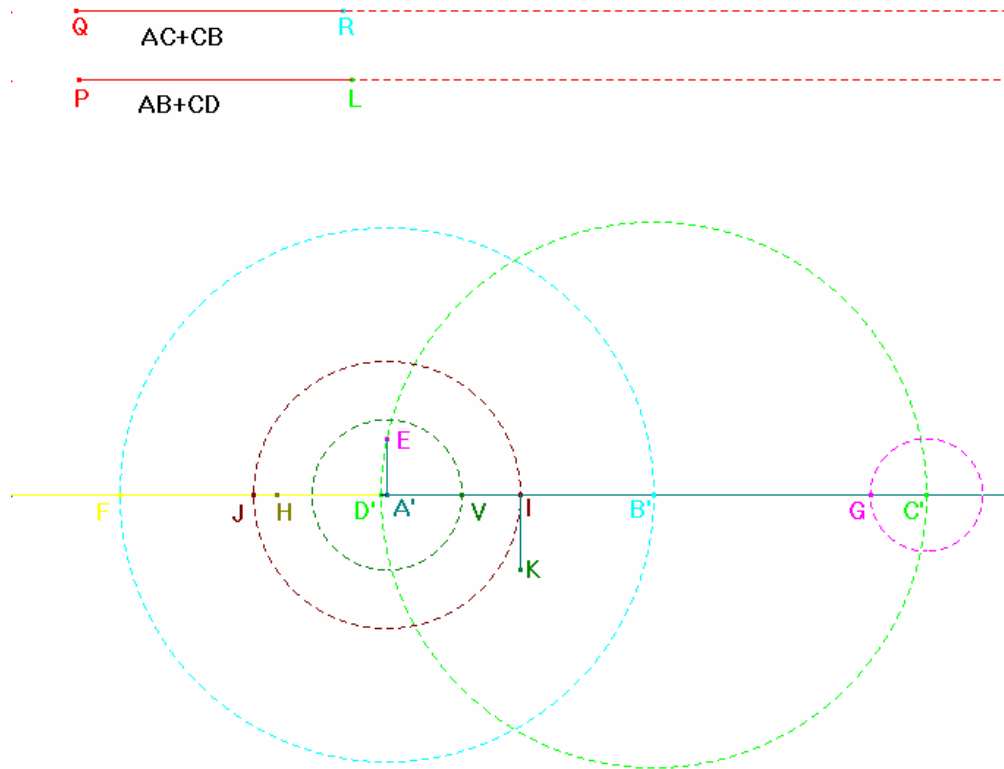


Figura 2



Spostando i punti R e L, lungo le semirette su cui giacciono, è possibile variare la somma di AC e CB, e la somma di AB e CD.

256

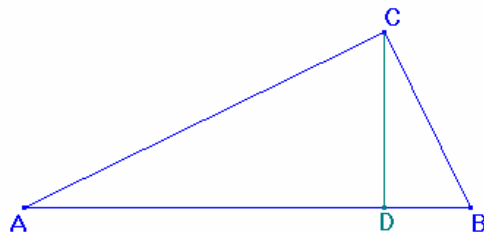
5

Problemi geometrici dell'Arithmetica Universalis di cui è stata realizzata un'immagine interattiva

Il presente capitolo è costituito dalla traduzione dei problemi proposti nell'*Arithmetica Universalis*. Il testo di riferimento è l'*Arithmétique Universelle* (a cura di Noel Beaudeau), Bernard, Paris, 1802.

5.1 Problema V

Dati, in un triangolo rettangolo, la base AB e la somma dell'altezza e dei lati $CA + CB + CD$, trovare il triangolo.



Siano $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, $CD = x$, allora $AC + CB = a - x$.

Ponete $AC - CB = y$, avrete $AC = \frac{a - x + y}{2}$ e $CB = \frac{a - x - y}{2}$. Inoltre, $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$,

ovvero, $\frac{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}{2} = b^2$.

Si ha ancora, $AC \times CB = AB \times CD$, ovvero $\frac{a^2 - 2ax + x^2 - y^2}{4} = bx$, e ricavando da queste

due equazioni i valori di y^2 e confrontandoli, si ha, $2b^2 - a^2 + 2ax - x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4bx$, e riducendo, $x^2 = 2ax + 2bx - a^2 + b^2$, da cui si ottiene, $x = a + b - \sqrt{2ab + 2b^2}$ ²²⁰.

Da questa ultima equazione si ottiene il seguente enunciato geometrico:

Dalla somma del perimetro e dell'altezza, sottraete una media proporzionale tra questa stessa somma e il doppio della base, e il resto sarà l'altezza.

²²⁰ Se $x < a$ l'altra radice non è una soluzione accettabile. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. V, p. 289, nota 381.

Lo stesso in altro modo

Siano $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, $AC = x$, e si avrà, $BC = \sqrt{b^2 - x^2}$, $CD = \frac{x\sqrt{b^2 - x^2}}{b}$ e

$x + CB + CD = a$, ovvero $CB + CD = a - x$. Di conseguenza, $\frac{b+x}{b}\sqrt{b^2 - x^2} = a - x$. Ed

elevando ciascun membro al quadrato, e moltiplicando tutto per b^2 , si avrà,

$$-x^4 - 2bx^3 + 2b^3x + b^4 = a^2b^2 - 2ab^2x + b^2x^2.$$

E, invertendo e ordinando,

$$x^4 + 2bx^3 + 3b^2 \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2b^3 \\ + 2ab^2 \end{array} \right\} x + 2ab^3 = \frac{+b^4}{+a^2b^2} = \frac{2b^2}{+2ab} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 4b^3 \\ + 4ab^2 \end{array} \right\} x + 2ab^3 \quad {}^{221}.$$

Ed estraendo la radice da una parte e dall'altra, si avrà,

$$x^2 + bx + b^2 + ab = (x + b)\sqrt{2ab + 2b^2}.$$

E risolvendo questa equazione, si ha,

$$x = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} \pm \sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab}.$$

Costruzione Geometrica



Ponete $AB = \frac{1}{2}b$, $CB = \frac{1}{2}a$ e $CD = \frac{1}{2}AB$. Prendete AE medio proporzionale tra b e AC .

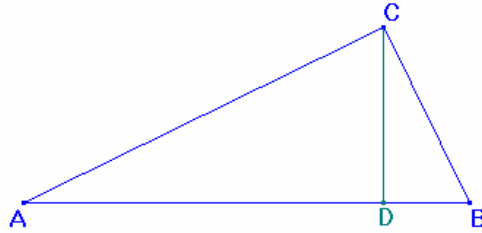
²²¹ In realtà, tale equazione si ottiene sommando a ciascun membro dell'equazione che si ottiene trasportando e ordinando i termini dell'equazione $-x^4 - 2bx^3 + 2b^3x + b^4 = a^2b^2 - 2ab^2x + b^2x^2$, la quantità $\frac{2b^2}{+2ab} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 4b^3 \\ + 4ab^2 \end{array} \right\} x + 2ab^3$. *Arithmétique Universelle*, Tomo II, nota 22, pp.130 - 131.

Prendete inoltre, EF medio proporzionale tra b e DE , portate EF da una parte e dall'altra del punto E , e le due linee BF , BF saranno i due lati del triangolo²²².

²²² Essendo $AC = \frac{b+a}{2}$, si ha $AE = \sqrt{b \cdot AC} = \sqrt{b \cdot (AB + CB)} = \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab}$, e poiché $DE = DC - CE = DC - (AC - AE) = \frac{1}{4}b - \frac{b+a}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} = -\frac{1}{4}b - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab}$, si ha che il medio proporzionale EF tra b e DE è uguale a $EF = \sqrt{b \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab}$. Pertanto, sommando e sottraendo EF a $BE = BC - CE = \frac{1}{2}a - \frac{b+a}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab}$, si ottiene $BF = BE \pm EF = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} \pm \sqrt{b \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab}$.

5.2 Problema VI

Dati un triangolo rettangolo ABC , la somma dei lati $AC + BC$, e l'altezza CD , trovare il triangolo.



Siano $AC + BC = a$, $CD = b$, $AC = x$, si avrà, $BC = a - x$, e $AB = \sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}$.

Si ha inoltre la proporzione $CD : AC :: CB : AB$, che dà $AB = \frac{ax - x^2}{b}$. Di conseguenza,

$ax - x^2 = b\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}$, e, quadrando ciascun membro e ordinando

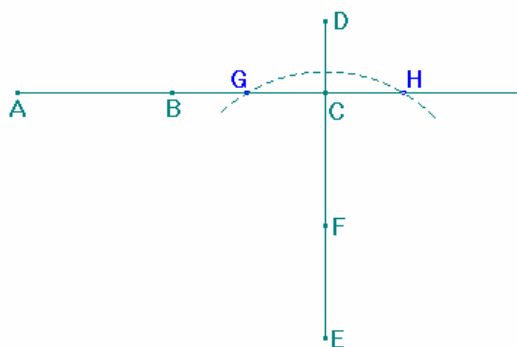
$x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 - 2b^2x^2 = 0$. Sommate a ciascun membro $a^2b^2 + b^4$, e avrete

$x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 - 2b^2x^2 + a^2b^2 + b^4 = a^2b^2 + b^4$, ed estraendo la radice da ciascun lato

$x^2 - ax - b^2 = -b\sqrt{a^2 + b^2}$. E risolvendo questa equazione,

$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Costruzione Geometrica



Ponete $AB = BC = \frac{1}{2}a$. Elevate in C la perpendicolare $CD = b$; estendete CD fino a E , affinché $DE = DA$; prendete un medio proporzionale CF tra CD e CE , e dal punto F come centro, e con un raggio uguale a BC , descrivete l'arco di cerchio GH , che taglierà la retta BC in G e in H , e le linee BG e BH saranno i due lati del triangolo²²³.

Lo stesso in altro modo

Siano $AC + BC = a$, $AC - BC = y$, $AB = x$ e $DC = b$, si avrà $AC = \frac{a+y}{2}$, $BC = \frac{a-y}{2}$,

$$\frac{a^2 + y^2}{2} = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 = x^2. \quad \frac{a^2 - y^2}{4b} = \frac{AC \times BC}{DC} = AB = x.$$

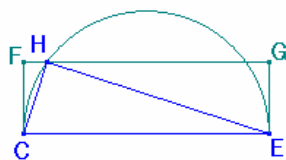
Dunque, $2x^2 - a^2 = y^2 = a^2 - 4bx$ e $x^2 + 2bx = a^2$; equazione che, risolta, dà $x = -b + \sqrt{b^2 + a^2}$. Che nella costruzione qui sopra, ci dà CE come ipotenusa del triangolo

²²³ Poiché $AD = DE = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, si ha che $CE = DE - CD = -b + \sqrt{a^2 + b^2}$, essendo inoltre $CF = \sqrt{-b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2}}$, si ha che $CG = CH = \sqrt{GF^2 - CF^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}}$, pertanto

$$BG = BC - GC = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{e} \quad BH = BC + CH = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Arithmétique Universelle, Tomo II, nota 24, p.132.

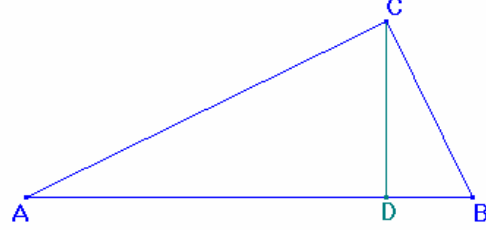
cercato. Ora, una volta che la base e l'altezza sono note, sia nel problema precedente che in questo, ecco in che modo si costruisce il triangolo.



Fate un parallelogramma CG il cui lato maggiore CE sia la base del triangolo, e il lato minore CF l'altezza; su CE , come diametro, descrivete un semicerchio che taglierà il lato opposto FG in H ; tracciate dal punto H , agli estremi del diametro, i segmenti CH e EH , e CEH sarà il triangolo cercato.

5.3 Problema VII

Date in un triangolo rettangolo, la somma dei lati, e la somma dell'altezza e della base, trovare il triangolo.



Siano la somma dei lati $AC + CB = a$, la somma della base e dell'altezza $AB + CD = b$, il lato $AC = x$, la base $AB = y$; e si avrà $BC = a - x$, $CD = b - y$,
 $a^2 - 2ax + 2x^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 = y^2$,

$ax - x^2 = AC \times BC = AB \times CD = by - y^2 = by - a^2 + 2ax - 2x^2$, e $by = a^2 - ax + x^2$, e quadrando ciascun membro, $b^2 y^2 = a^4 - 2a^3 x + 3a^2 x^2 - 2ax^3 + x^4$. E sostituendo nel primo membro, al posto di y^2 il suo valore $a^2 - 2ax + 2x^2$, trasportando e ordinando si avrà,

$x^4 - 2ax^3 + 3a^2 x^2 - 2a^3 x + a^4 = 0$. E sommando a ciascun membro, $b^4 - a^2 b^2$, essa

diverrà, $x^4 - 2ax^3 + 3a^2 x^2 - 2a^3 x + a^4 = b^4 - a^2 b^2$. Ed estraendo la radice

quadrata da ciascun membro, $x^2 - ax + a^2 - b^2 = -b\sqrt{b^2 - a^2}$, e risolvendo questa ultima

equazione, si avrà infine, $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b^2 - \frac{3}{4}a^2 - b\sqrt{b^2 - a^2}}$.

²²⁴ *Arithmétique Universelle*, Tomo II, nota 73, esempio II, pp.221 – 222.

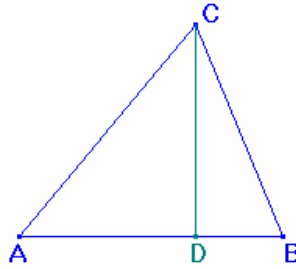
Costruzione Geometrica

Prendete un medio proporzionale R tra $b+a$ e $b-a$; un altro medio proporzionale S tra R e $b-R$; infine un medio proporzionale T tra $\frac{1}{2}a+S$ e $\frac{1}{2}a-S$; e i lati del triangolo cercato saranno, $\frac{1}{2}a+T$ e $\frac{1}{2}a-T$ ²²⁵.

²²⁵ $R = \sqrt{(b+a) \cdot (b-a)} = \sqrt{(b^2 - a^2)}$, $S = \sqrt{b\sqrt{(b^2 - a^2)} + a^2 - b^2}$ e $T = \sqrt{b^2 - \frac{3}{4}a^2 - b\sqrt{(b^2 - a^2)}}$, pertanto $\frac{1}{2}a \pm T = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b^2 - \frac{3}{4}a^2 - b\sqrt{b^2 - a^2}}$. *Arithmétique Universelle*, Tomo II, nota 25, p. 133.

5.4 Problema XIV

Trovare il triangolo ABC i cui i tre lati AB , AC , BC , e l'altezza CD sono in progressione aritmetica.



Per l'enunciato del problema si ha dunque questa proporzione $\div AB : AC : BC : DC$ ²²⁶. Ponete $AC = a$, $BC = x$, avrete $DC = 2x - a$ e $AB = 2a - x$; avrete pure $AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{4ax - 4x^2}$; e $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{4ax - 3x^2 - a^2}$. Avremo dunque un secondo valore di $AB = \sqrt{4ax - 4x^2} + \sqrt{4ax - 3x^2 - a^2}$. Così $2a - x = \sqrt{4ax - 4x^2} + \sqrt{4ax - 3x^2 - a^2}$; ovvero $2a - x - \sqrt{4ax - 4x^2} = \sqrt{4ax - 3x^2 - a^2}$. E quadrando ciascun membro, $4a^2 - 3x^2 - (4a - 2x) \times \sqrt{4ax - 4x^2} = 4ax - 3x^2 - a^2$; ovvero $5a^2 - 4ax = (4a - 2x) \sqrt{4ax - 4x^2}$. Elevando di nuovo ciascun membro al quadrato e ordinando, si ha $16x^4 - 80ax^3 + 144a^2x^2 - 104a^3x + 25a^4 = 0$, equazione che, essendo divisa per $2x - a$, diviene, $8x^3 - 36ax^2 + 54a^2x - 25a^3 = 0$. E risolvendola, si troverà x per un arbitrario valore di a . Essendo determinati a e x , costruite il triangolo i cui lati saranno $2a - x$, a , e x ; e l'altezza abbassata sul lato $2a - x$ sarà uguale a $2x - a$. Se avessi posto la

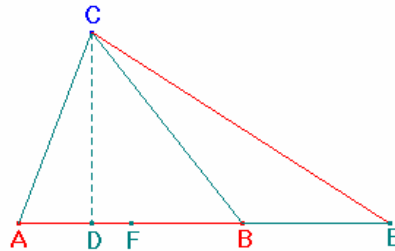
²²⁶ Ovvero $DC - BC = BC - AC = AC - AB$

differenza dei lati $= d$, e la perpendicolare $= x$, l'operazione sarebbe stata più corta, l'equazione finale un po' più semplice, e avrei avuto, $x^3 = 24d^2x + 48d^3$ ²²⁷.

²²⁷ Posto $AC - BC = d$ e $DC = x$, si ha che $BC = x + d$, $AC = x + 2d$ e $AB = x + 3d$, pertanto $AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{4d^2 + 4dx}$ e $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{d^2 + 2dx}$, e da ciò segue che $x + 3d = AB = AD + BD = \sqrt{4d^2 + 4dx} + \sqrt{d^2 + 2dx}$, ovvero $x^3 = 24d^2x + 48d^3$.

5.5 Problema XVI

Su una base data AB , costruire il triangolo ABC , il cui vertice C è su una retta CE data di posizione, e la cui base è media proporzionale aritmetica tra i lati.



Bisogna, dividere la base in due parti uguali in F , e prolungare questa base finché essa incontri, in un punto E , la retta data di posizione EC , e poi abbassare sulla base una perpendicolare CD .

Si chiamerà $AB = a$, $FE = b$, e $BC - AB = x$; e ciò darà $BC = a + x$ e $AC = a - x$ ²²⁸. Ma per la 13^{ma} proposizione del secondo libro degli Elementi²²⁹

$$BD = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{2AB} = 2x + \frac{a}{2} . \quad \text{Di conseguenza, } FD = 2x , \quad DE = b + 2x \quad \text{e}$$

$$CD = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{DB}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - 3x^2} .$$

Ma poiché le posizioni delle rette CE e AB sono date, l'angolo CED è pure dato. Così si conosce il rapporto di DE su CD .

²²⁸ Nella nota 38 dell'*Arithmétique Universelle* (Tomo II, p.139), Beaudeau osserva che $2AB = BC + AC$, in quanto per ipotesi la base AB è media proporzionale aritmetica tra AC e BC , pertanto $AB - AC = BC - AB$, da cui, ricordando le posizioni fatte, si ottiene $AC = a - x$.

²²⁹ Tale proposizione afferma che, nei triangoli acutangoli, il quadrato sul lato opposto all'angolo acuto è minore della somma dei quadrati sui lati che comprendono l'angolo acuto, di due volte il rettangolo contenuto da uno dei lati intorno all'angolo acuto, cioè quello su cui cade l'altezza, e il segmento tagliato all'interno dall'altezza verso l'angolo acuto.

Supposto che esso sia come quello di d su e , si avrà la proporzione

$d : e :: b + 2x : \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - 3x^2}$. Facendo il prodotto degli estremi e quello dei medi, si ha

l'equazione $eb + 2ex = d\sqrt{\frac{3}{4}a^2 - 3x^2}$, quadrando ciascun membro e aggiustando

convenientemente i termini si ha $x^2 = \frac{\frac{3}{4}d^2a^2 - e^2b^2 - 4e^2bx}{4e^2 + 3d^2}$, e risolvendo l'equazione

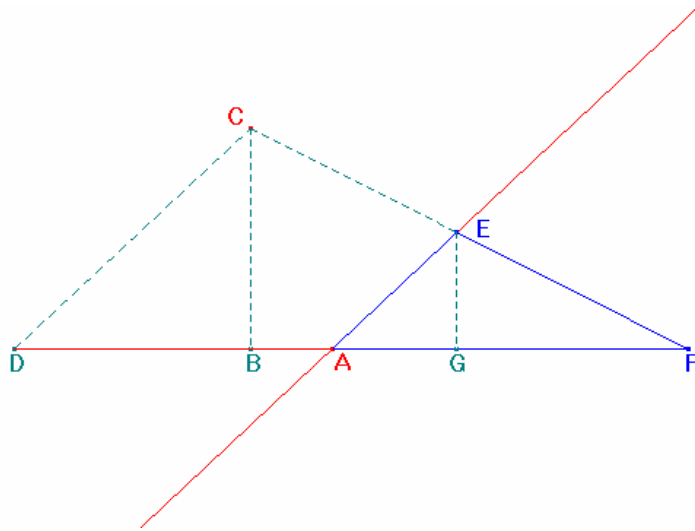
diventa $x = \frac{-2e^2b + d\sqrt{3e^2a^2 - 3e^2b^2 + \frac{9}{4}d^2a^2}}{4e^2 + 3d^2}$.²³⁰

Una volta noto x , lo sono pure $BC = a + x$ e $AC = a - x$.

²³⁰ Nella nota 39 dell'*Arithmétique Universelle* (Tomo II, p.139), Beaudeau mostra come *costruire* tale equazione ma, come Newton, non tiene conto della seconda radice dell'equazione risolvente, cui corrisponde la seconda soluzione del problema.

5.6 Problema XX

Condurre da un punto dato C , una retta CF , che formi con altre due rette AE , AF date di posizione, un triangolo AEF di grandezza data.



Conducete CD parallela ad AE , e CB ed EG perpendicolari ad AF .

Siano $AD = a$, $CB = b$, $AF = x$ e la superficie del triangolo $AEF = c^2$; per le linee proporzionali $DF : AF = (DC : AE) = CB : EG$ ²³¹, ossia, $a + x : x = b : \frac{bx}{a + x}$, si avrà,

$$EG = \frac{bx}{a + x}.$$

Moltiplicate questa perpendicolare per la metà della base AF , e avrete come espressione

della superficie del triangolo AEF , $\frac{bx^2}{2a + 2x} = c^2$, ossia, $x^2 - \frac{2c^2x}{b} - \frac{2ac^2}{b} = 0$, equazione

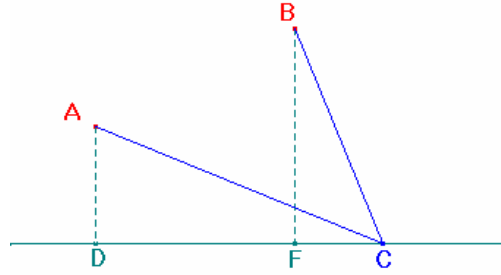
che, risolta, dà $x = \frac{c^2 + \sqrt{c^4 + 2abc^2}}{b}$.

Si seguirebbe assolutamente lo stesso metodo se si trattasse di condurre, per un punto dato, una retta che divide un triangolo, o un trapezio, in un rapporto dato.

²³¹ La prima parte della proporzione è dovuta ad un corollario del teorema di Talete, la seconda, alla similitudine dei triangoli DCF e AEF , e al fatto che CB e EG , sono altezze omologhe di tali triangoli.

5.7 Problema XXI

Determinare un punto C sulla retta DF , tale che, se da questo punto si conducono due segmenti AC e BC , per due punti dati A e B , la differenza di questi due segmenti sia uguale ad una linea data.



Dai due punti dati abbassate le perpendicolari AD e BF . Ponete $AD = a$, $BF = b$, $DF = c$, $DC = x$, e avrete $AC = \sqrt{a^2 + x^2}$, $FC = x - c$, e $BC = \sqrt{b^2 + x^2 - 2cx + c^2}$. Supponiamo che AC sia il più grande dei due segmenti, e BC il più piccolo, e che la loro differenza sia $= d$; si avrà dunque $\sqrt{a^2 + x^2} - d = \sqrt{b^2 + x^2 - 2cx + c^2}$. E quadrando ciascun membro, $a^2 + x^2 + d^2 - 2d\sqrt{a^2 + x^2} = b^2 + x^2 - 2cx + c^2$.

Cancellando ciò che si annulla, e ponendo, per abbreviare, $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2e^2$, si avrà $e^2 + cx = d\sqrt{a^2 + x^2}$, ed elevando di nuovo ciascun membro al quadrato, $e^4 + 2ce^2x + c^2x^2 = d^2a^2 + d^2x^2$. E risolvendo, questa equazione diverrà
$$x = \frac{e^2c + \sqrt{e^4d^2 - a^2d^4 + a^2d^2c^2}}{d^2 - c^2}.$$

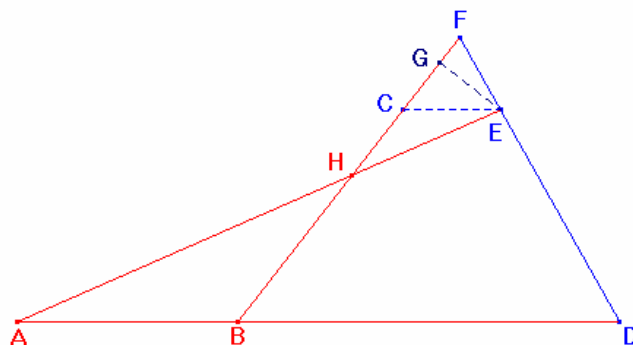
Il problema si risolverebbe in maniera analoga, se al posto della differenza delle linee AC e BC , fosse data la loro somma, oppure la somma o la differenza dei loro quadrati, o il loro rapporto, o il loro prodotto, oppure l'angolo che esse comprendono; e sarebbe ancora lo stesso se, al posto della retta DC , fosse data la circonferenza di un cerchio o un'altra curva

qualunque, purché in questo ultimo caso il calcolo si riporti ad una retta che unisca i punti A e B ²³².

²³² Le soluzioni del problema in esame, sono costituite dai punti d'intersezione della retta DF , con un'iperbole di fuochi A e B . Analogamente, nei problemi che si ottengono considerando in luogo della differenza di AC e BC , la loro somma, o la differenza dei loro quadrati, ecc. le soluzioni sono i punti d'intersezione delle linea, retta o curva, DF , con un opportuno luogo geometrico. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, vol. V, pp. 198 – 199, nota 234.

5.8 Problema XXII

Date di posizione tre rette, AD, AE, BF, condurne una quarta, DF, in modo che le sue parti DE, EF, intercettate dalle prime rette, siano di lunghezza data.



Conducete la perpendicolare EG su BF , e CE parallela ad AD . Le tre rette date di posizione si incontrano in A , B e H .

Ponete $AB = a$, $BH = b$, $AH = c$, $ED = d$, $EF = e$ e $HE = x$.

Ora, per i triangoli simili ABH , ECH , si ha $AH : AB = HE : CE = \frac{ax}{c}$ e

$$AH : HB = HE : HC = \frac{bx}{c}. \text{ Sommate insieme } HB \text{ e } HC, \text{ e avrete } BC = b + \frac{bx}{c} = \frac{bc + bx}{c}.$$

Analogamente, i triangoli simili FEC e FDB danno $ED:CB = FE:FC = \frac{ebx+ebc}{dc}$. E

infine, per le proposizioni 12 e 13 del secondo libro degli Elementi²³³, si ha

$$\frac{EC^2 - EF^2}{2FC} + \frac{1}{2}FC = CG, \text{ e } CG = \frac{HE^2 - EC^2}{2CH} - \frac{1}{2}CH.$$

$$\text{Dunque, } \frac{EC^2 - EF^2}{2FC} + \frac{1}{2}FC = \frac{HE^2 - EC^2}{2CH} - \frac{1}{2}CH.$$

²³³ La proposizione 12 afferma che, nei triangoli ottusangoli, il quadrato sul lato opposto all'angolo ottuso è maggiore della somma dei quadrati sui lati che comprendono l'angolo ottuso, di due volte il rettangolo contenuto da uno dei lati intorno all'angolo ottuso, cioè quello su cui cade l'altezza, e il segmento tagliato all'esterno dall'altezza verso l'angolo ottuso. Per la proposizione 13 vedi paragrafo 5.5 nota 229.

E introducendo i valori analitici $\frac{\frac{a^2 x^2}{c^2} - e^2}{\frac{2ebx + 2ebc}{dc}} + \frac{ebx + ebc}{2dc} = \frac{x^2 - \frac{a^2 x^2}{c^2}}{\frac{2bx}{c}} - \frac{bx}{2c}$, ossia

$$\frac{a^2 dx^2 - e^2 dc^2}{ebx + ebc} + \frac{ebx}{d} + \frac{ebc}{d} = \frac{c^2 x - a^2 x - b^2 x}{b}.$$

Ponete, per abbreviare, $\frac{c^2 - a^2 - b^2}{b} - \frac{eb}{d} = m$, e avrete $\frac{a^2 dx^2 - e^2 dc^2}{ebx + ebc} + \frac{ebc}{d} = mx$. E

moltiplicando tutto per $c + x$, diverrà $\frac{a^2 dx^2 - e^2 dc^2}{eb} + \frac{ebcx + ebc^2}{d} = mx^2 + mcx$. Mettete

ancora, p al posto di $\frac{a^2 d}{eb} - m$, e $2pq$ al posto di $mc - \frac{ebc}{d}$, e infine pr^2 al posto di

$$-\frac{ebc^2}{d} + \frac{e^2 dc^2}{eb}, \text{ e l'equazione sarà ridotta a } x^2 = 2qx + r^2. \text{ Che dà } x = q \pm \sqrt{q^2 + r^2}.$$

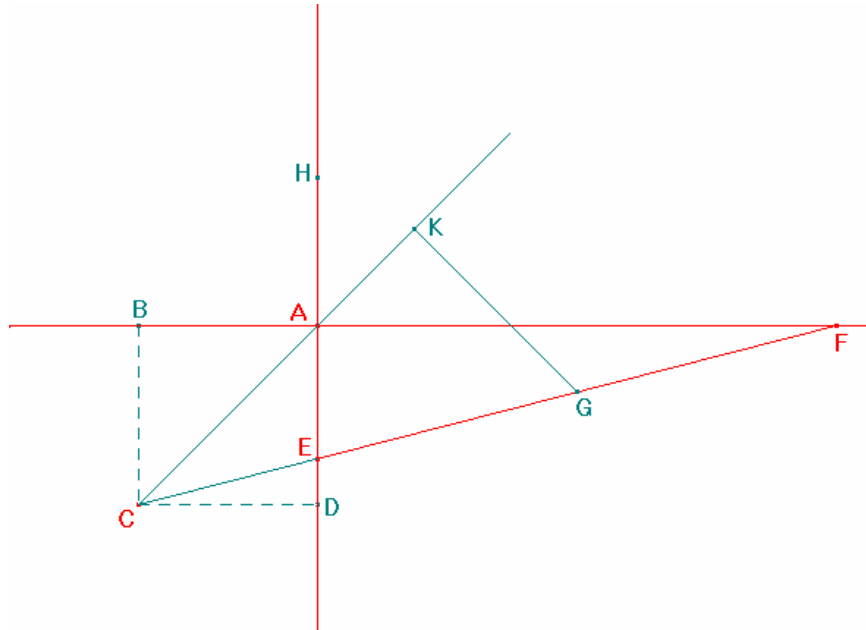
Trovato x , ovvero HE , conducete dal suo estremo E , la retta EC parallela ad AB . Fate poi la proporzione $d : e = BC : FC$ ²³⁴.

Determinato FC , per il punto F e il punto E , conducete la retta FED , ed essa soddisferà le condizioni del problema.

²³⁴ Segue dalla proporzione $ED : EF = BC : FC$, data dalla similitudine dei triangoli FEC e FDB .

5.9 Problema XXIV

Inserire nell'angolo retto EAF , un segmento dato EF , in modo che questo segmento esteso passi per un punto C , egualmente distante dalle due rette che comprendono l'angolo retto.



Completare il quadrato $ABCD$, e dividere la retta data EF in due parti uguali nel punto G .

Allora, posto CB o $CD = a$, EG o $FG = b$, e $CG = x$; si ha $CE = x - b$, e $CF = x + b$.

Essendo poi $\overline{CF}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{BF}^2$, si ha $BF = \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$.

Poiché i triangoli CDE e FBC sono simili²³⁵, si ha $CE:CD::CF:BF$, ovvero

$$x-b : a :: x+b : \sqrt{x^2+2bx+b^2-a^2} . \text{ Da cui si ottiene } ax+ab=(x-b)\sqrt{x^2+2bx+b^2-a^2} .$$

Elevando al quadrato ambo i membri di questa equazione e ordinando, si ha

$$x^4 = \frac{2a^2}{+2b^2} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2a^2b^2 \\ -b^4 \end{array} \right. . \text{Equazione che, risolta con il metodo di quelle di secondo grado, dà}$$

$$x^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}, \text{ e infine } x = \sqrt{a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}}.$$

Essendo così noto il valore di x , ovvero di CG , si può determinare CE o CF , e mediante l'una o l'altra di queste due rette, si determina il punto E o il punto F , e il problema è risolto.

²³⁵ Per il primo criterio, in quanto sono rettangoli e hanno gli angoli *DCE* e *CFB* uguali.

Lo stesso in altro modo

Posto $CE = x$, $CD = a$ e $EF = b$, avrete $CF = x + b$, e $BF = \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$, e la proporzione $CE : CD :: CF : BF$, ovvero $x : a :: x + b : \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$; che dà $ax + ab = x\sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$, elevando al quadrato ambo i membri di questa equazione e ordinando i termini, essa diviene $x^4 + 2bx^3 - 2a^2x^2 - 2a^2bx + a^4 = a^2b^2 + a^4$. Equazione di quarto grado le cui radici sono più difficili da trovare che quelle del caso precedente. Vediamo però come si possono trovare. Sommate da una parte e dall'altra $a^2b^2 + a^4$, al fine di fare del primo membro un quadrato perfetto, e avrete $x^4 + 2bx^3 - 2a^2x^2 - 2a^2bx + a^4 = a^2b^2 + a^4$; ed estraendo la radice di ciascun membro, esso diverrà $x^2 + bx - a^2 = \pm a\sqrt{a^2 + b^2}$.

Questa qui è l'occasione di dare una regola sulla scelta dei termini propri a cominciare il calcolo.

*Quando due termini hanno una tale somiglianza di rapporto con gli altri termini della questione, che prendendo l'uno o l'altro si arriva a due equazioni interamente simili; o prendendoli tutti e due allo stesso tempo, essi hanno nell'equazione finale lo stesso numero di dimensioni, e la stessa forma, e non possono differire che per i segni + e -, bisogna respingerli tutti e due ugualmente, e prendere al loro posto un terzo termine che abbia uno stesso rapporto con l'uno e l'altro, per esempio la loro semisomma, o la loro semidifferenza, o una media proporzionale, o infine tale altra quantità che si vuole che abbia con esse una stessa relazione, purché questa quantità sia la sola che goda di questa proprietà.*²³⁶

È così che nel problema precedente, volendo che la linea EF abbia una stessa relazione con AB e AD , come si può assicurare tracciando EF nell'angolo BAH , e che di conseguenza nessuna ragione di preferenza mi può determinare a prendere per l'incognita che si deve cercare, ED piuttosto che BF , o AE piuttosto che AF , o CE piuttosto che CF ; dunque in

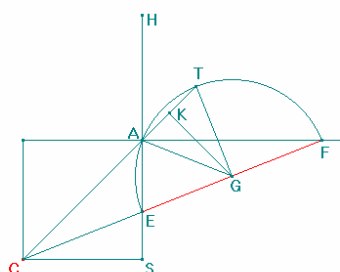
²³⁶ Tale regola, è nota come regola *Fratrum*, e, verrà criticata, un secolo dopo, da Lagrange, in quanto la sua applicazione esige una conoscenza preliminare del numero e del tipo di soluzioni possibili, che può aversi solo dopo aver acquisito una notevole familiarità geometrica o analitica con un dato problema.

luogo dei punti E ed F che causano la mia incertezza, io prendo, nella prima soluzione, il punto G che divide EF in due parti uguali; e siccome CG ha la stessa relazione con AB e AD , e non c'è una seconda quantità che abbia con queste due linee la stessa relazione di CG ; io mi sono determinato a prendere CG per l'incognita che si deve cercare, ed ho ottenuto un'equazione di 4° grado, in cui non si è trovato nessun termine affetto da potenza dispari dell'incognita. Si vede bene che io sarei ricaduto nella prima incertezza, se avendo preso il punto G , io avessi voluto cercare un'incognita per mezzo di una perpendicolare abbassata da questo punto su AF , perché avrei potuto ugualmente abbassarne una su AD ; per la stessa ragione, io non ne ho abbassate né su CB né su CD .

Io avrei potuto ancora, ricordando che il punto G sta sulla circonferenza di un cerchio descritto dal punto A come centro e con GE come raggio²³⁷, avrei potuto, dico io, abbassare la perpendicolare GK sulla diagonale AC , e cercare AK o CK , che hanno lo stesso rapporto con AB o AD , e arrivare all'equazione di secondo grado $y^2 = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}b^2$, chiamando AK , y ; AC , e ; e EG , b .²³⁸

²³⁷ Poiché il triangolo rettangolo EAF si può inscrivere nel semicerchio di centro il punto medio G della sua ipotenusa EF .

²³⁸ Prolungata la diagonale AC del quadrato, detto K il suo punto d'incontro con la perpendicolare condotta da G , e tracciato il cerchio EAF , di centro G e raggio GE , che incontra AC in T , si ha che la corda AT è divisa in due parti uguali, AK e KT , dalla perpendicolare GK e che i triangoli AKG e TKG sono uguali. Inoltre, TG è perpendicolare a CG , in quanto l'angolo al centro TGF , insiste sullo stesso arco dell'angolo alla circonferenza $TAF = 45^\circ$. Pertanto, applicando il primo teorema di Euclide al triangolo CGT , si ottiene la proporzione $CT : TG = TG : TK (= AK)$, da cui infine, osservato che $CT = CA + AK + KT = CA + 2AK$ e sostituiti i nomi imposti da Newton, si ottiene la proporzione $CT (= e + 2y) : TG (= b) = TG (= b) : TK (= AK = y)$, che ridotta diviene $y^2 = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}b^2$. *Arithmétique Universelle*, Tomo II, nota 41, p.140.

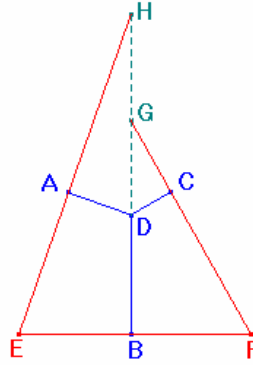


Trovato così AK , si può elevare la perpendicolare KG , ed il suo punto d'incontro G , con la circonferenza di centro A descritta, può servire con il punto C , a dirigere la retta CF , e il problema può essere risolto.

È seguendo lo spirito di questa regola, che nei problemi IX e X, in cui si devono determinare i due lati AC e BC di un triangolo, in luogo di cercare l'uno o l'altro di questi lati, io ho cercatola loro semi-differenza. Ma si vedrà ancora meglio nel problema XXVIII°, il grande uso di questa regola.

5.10 Problema XXVI

Date tre rette AE, BF, CF, trovare un punto D tale che, se da questo punto si abbassano su ciascuna delle rette, le perpendicolari DA, DB, DC, queste perpendicolari sono tra loro in un rapporto dato.



Prolungate una delle rette date di posizione, e così la perpendicolare che cade su di essa, per esempio BF , e la sua perpendicolare BD , finché esse incontrino le altre due rette AE e FC , la retta BF le incontrerà nei punti E ed F , e la perpendicolare nei punti G ed H . Posto ora $EB = x$ e $EF = a$, avrete $BF = a - x$. E siccome le rette EF , EA e FC sono date di posizione, gli angoli E e F , e i rapporti dei lati dei triangoli EBH e FBG sono pure dati²³⁹.

Sia dunque il rapporto di EB su BH , come quello di d su e , e si avrà, $BH = \frac{ex}{d}$; e

$$EH = \sqrt{EB^2 + BH^2} = \sqrt{x^2 + \frac{e^2 x^2}{d^2}} = \frac{x}{d} \sqrt{d^2 + e^2}. \text{ Supponiamo ancora che } BF \text{ stia a } BG$$

come d sta a f , e avremo, $BG = \frac{fa - fx}{d}$, e

$$FG = \sqrt{BF^2 + BG^2} = \sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + \frac{f^2 d^2 - 2f^2 ax + f^2 x^2}{d^2}}, \text{ che si riduce a}$$

$$FG = \frac{a - x}{d} \sqrt{d^2 + f^2}.$$

²³⁹ La proposizione XL dei *DATI*, assicura che, se gli angoli di un triangolo sono dati di grandezza, il triangolo è dato di specie, ossia è dato il rapporto dei lati fra loro.

Dopo chiamiamo BD , y ; e ci diventa, $HD = \frac{ex}{d} - y$; e $GD = \frac{fa - fx}{d} - y$. E siccome si hanno le proporzioni $AD : HD :: BE : HE :: d : \sqrt{d^2 + e^2}$ ²⁴⁰; e $DC : GD :: BF : FG :: d : \sqrt{d^2 + e^2}$ ²⁴¹. Dalla prima si ottiene $AD = \frac{ex - dy}{\sqrt{d^2 + e^2}}$, e dalla seconda $DC = \frac{fa - fx - dy}{\sqrt{d^2 + f^2}}$. Inoltre, poiché i rapporti delle linee BD , AD , DC , sono dati, supponiamo che $BD : AD :: \sqrt{d^2 + e^2} : h - d$, ed esso diverrà, $\frac{hy - dy}{\sqrt{d^2 + e^2}} = AD = \frac{ex - dy}{\sqrt{d^2 + e^2}}$; che dà $hy = ex$.

Sia ancora $BD : DC :: \sqrt{d^2 + f^2} : k - d$, e si avrà $\frac{ky - dy}{\sqrt{d^2 + f^2}} = DC = \frac{fa - fx - dy}{\sqrt{d^2 + f^2}}$, che dà $ky = fa - fx$, da cui si ottiene, $y = \frac{fa - fx}{k}$.

Ma l'equazione $hy = ex$, dà pure $y = \frac{ex}{h}$, dunque $\frac{ex}{h} = \frac{fa - fx}{k}$, o meglio, $x = \frac{afh}{ek + fh}$.

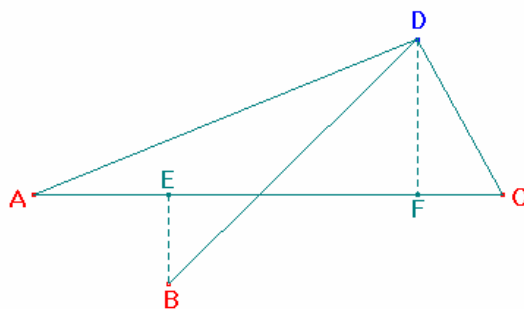
Fate dunque questa proporzione, $\frac{ek}{f} + h : h :: EF : EB$, e determinato così EB , ovvero x , sostituite il suo valore nell'equazione $hy = ex$, e avrete il valore di y per questa proporzione, $h : e :: BE : BD$; così il punto D sarà determinato.

²⁴⁰ Segue dalla similitudine tra i triangoli rettangoli DAH ed EBH .

²⁴¹ Segue dalla similitudine tra i triangoli rettangoli DCG e FBG .

5.11 Problema XXVII

Trovare un punto D tale che, se da questo punto si conducono tre segmenti DA , DB , DC , per tre punti dati A , B , C , questi segmenti sono tra loro in un rapporto dato.



Dei tre punti dati, congiungetene due, per esempio A e C , con un segmento AC , e dal terzo punto B , così come dal punto cercato D , abbassate le perpendicolari BE e DF sulla retta AC .

Ponete $AE = a$, $AC = b$, $EB = c$, $AF = x$ e $FD = y$. E avrete, $AD^2 = x^2 + y^2$; $FC = b - x$; $CD^2 = FC^2 + FD^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$. $EF = x - a$, e $BD^2 = EF^2 + (EB + FD)^2 = x^2 - 2ax + a^2 + c^2 + 2cy + y^2$.

Ora, poiché AD e CD sono in un rapporto dato, sia questo rapporto quello di d su e , e si avrà $CD = \frac{e}{d}\sqrt{x^2 + y^2}$. E poiché AD è pure in un rapporto dato su BD , sia questo rapporto quello di d su f , e si avrà $BD = \frac{f}{d}\sqrt{x^2 + y^2}$.

Di conseguenza $\frac{e^2 x^2 + e^2 y^2}{d^2} = CD^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$; e

$\frac{f^2 x^2 + f^2 y^2}{d^2} = BD^2 = x^2 - 2ax + a^2 + c^2 + 2cy + y^2$. Se, per abbreviare, in questa

equazione si mette p al posto di $\frac{d^2 - e^2}{d}$; e q al posto di $\frac{d^2 - f^2}{d}$, si avrà,

$b^2 - 2bx + \frac{px^2}{d} + \frac{py^2}{d} = 0$ e $a^2 + c^2 - 2ax + 2cy + \frac{qx^2}{d} + \frac{qy^2}{d} = 0$. Dalla prima si ottiene

$\frac{2bqx - b^2q}{p} = \frac{qx^2}{d} + \frac{qy^2}{d}$. Così, sostituendo nella seconda, al posto di $\frac{qx^2}{d} + \frac{qy^2}{d}$ il suo valore $\frac{2bqx - b^2q}{p}$, essa diventerà, $\frac{2bqx - b^2q}{p} + a^2 + c^2 - 2ax + 2cy = 0$. Se, per abbreviare,

si pone ancora, $m = a - \frac{bq}{p}$; e $2cn = \frac{b^2q}{p} - a^2 - c^2$, diventa, $2mx + 2cn = 2cy$. E dividendo

tutto per $2c$, l'equazione si riduce a $\frac{mx}{c} + n = y$. Sostituite quindi nell'equazione

$b^2 - 2bx + \frac{px^2}{d} + \frac{py^2}{d} = 0$, al posto di y^2 , il quadrato di $\frac{mx}{c} + n$, e avrete

$$b^2 - 2bx + \frac{px^2}{d} + \frac{pm^2}{dc^2}x^2 + \frac{2pmn}{dc}x + \frac{pn^2}{d} = 0.$$

Se, per abbreviare ancora, si scrive in questa equazione $\frac{b}{r}$ al posto di $\frac{p}{d} + \frac{pm^2}{dc^2}$; $\frac{sb}{r}$ al

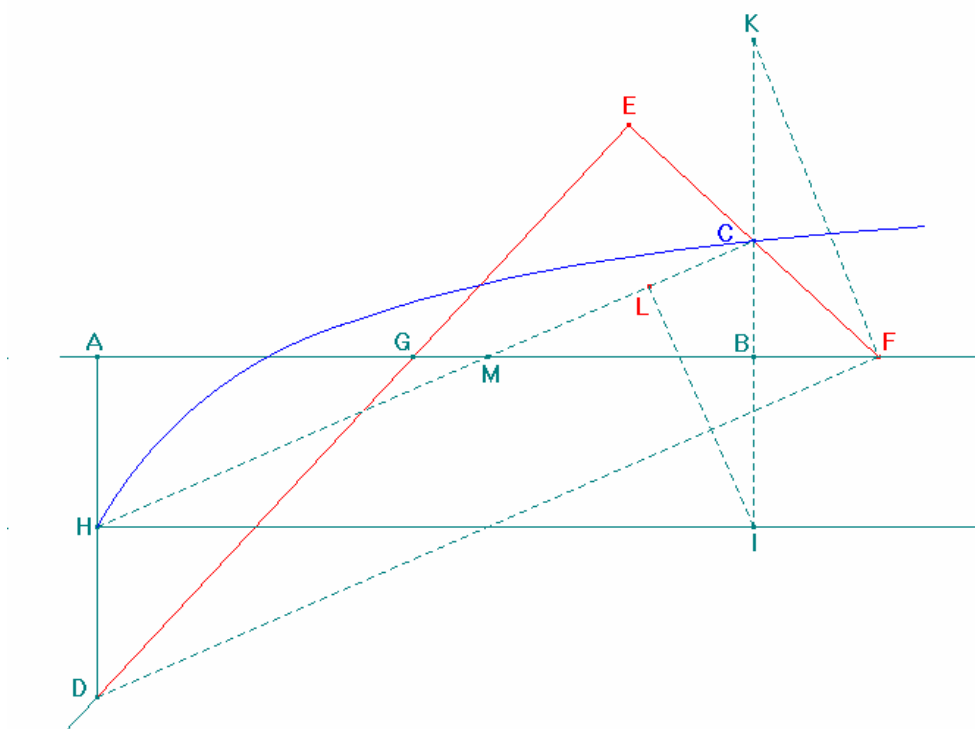
posto di $b - \frac{pmn}{dc}$, e $\frac{tb^2}{r}$ al posto di $b^2 + \frac{pn^2}{d} = 0$, si avrà, $x^2 = 2sx - tb$. Questa

equazione, se risolta, dà $x = s \pm \sqrt{s^2 - tb}$. Trovato x , l'equazione $\frac{mx}{c} + n = y$, darà il

valore di y . Ed essendo determinati x e y , o AF e FD , lo è pure il punto cercato D .

5.12 Problema XXXIV

Se si eleva su una retta AF una perpendicolare AD di lunghezza data, e una gamba ED della squadra DEF passa sempre per il punto D , mentre l'altra gamba EF , uguale ad AD , scivola su AF , trovare la curva HIC descritta dal punto C ²⁴² durante questo movimento, mediante la retta EF .



Siano, EC o $CF = a$, la perpendicolare $CB = y$, e $AB = x$.

Poiché i triangoli FBC e FEG sono simili, si avrà

$$BF(\sqrt{a^2 - y^2}) : BC + CF(y + a) :: EF(2a) : EG + GF(AG + GF) \text{ o } AF^{243}.$$

Così

²⁴² C è il punto medio di EF .

²⁴³ I triangoli FBC e FEG sono simili, per il primo criterio di similitudine, in quanto rettangoli e con un angolo in comune. Pertanto, $BC : BF = EG : EF$ e $CF : BF = GF : EF$, da cui segue $BC + CF : BF = EG + GF : EF$. Inoltre, $EG = AG$ dato che i triangoli DAG e GEF sono isometrici, per il primo criterio d'isometria.

$$\frac{2ay + 2a^2}{\sqrt{a^2 - y^2}} = AF = AB + BF = x + \sqrt{a^2 - y^2}.$$

E moltiplicando ciascun membro per $\sqrt{a^2 - y^2}$, si ha

$$2ay + 2a^2 = a^2 - y^2 + x\sqrt{a^2 - y^2},$$

ovvero

$$2ay + a^2 + y^2 = x\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Dividendo ciascun membro per $\sqrt{a + y}$ ²⁴⁴, poi quadrando e ordinando, si ha

$$y^3 + 3ay^2 + 3a^2y + a^3 + x^2 = 0^{245}.$$

Lo stesso in altro modo

Prolungate BC da una parte e dall'altra, in modo che BI e CK siano uguali a CF , e tracciate KF, HI, HC e DF .

Le rette HC e DF incontreranno AF e KI in M e in N . Abbassate poi, dal punto I la perpendicolare IL su HC , e avrete l'angolo

$$K = \frac{1}{2}BCF = \frac{1}{2}FGE = GFD = AMH = MHI = CIL^{246}.$$

Così i triangoli rettangoli KBF, FBN, HLI e ILC sono simili.

²⁴⁴ *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. V, p. 219, nota 261.

²⁴⁵ Paragrafo 3.1, nota 184.

²⁴⁶ $\angle K = \frac{1}{2}\angle BCF$, in quanto il triangolo FCK è isoscele e l'angolo $\angle BCF$ è esterno a esso; $\angle BCF = \angle FGE$, perché entrambi complementari dell'angolo $\angle EFG$; $\frac{1}{2}\angle FGE = \angle GFD$, in quanto, i triangoli DGF e FCB sono isosceli, e con gli angoli al vertice $\angle FCK$ e $\angle DGF$ uguali (perché, essendo $\angle AGD = \angle EGF = \angle BCF$, essi sono supplementari degli angoli uguali $\angle BCF$ e $\angle AGD$); $\angle GFD = \angle AMH$, in quanto HC è parallelo a DF (da $\angle CFN = \angle HDN$ e $HD = CF$, segue infatti che C e H sono equidistanti da DF), pertanto $\angle AMH$ e $\angle GFD$, sono angoli corrispondenti, formati dalle parallele HC e DF con la trasversale AF ; $\angle AMH = \angle MHI$ perché angoli alterni interni formati dalle parallele AF e HI , con la trasversale HM ; $\angle MHI = \angle CIL$ perché ambedue complementari dell'angolo $\angle HCI$.

Ponete dunque, $FC = a$, $HI = x$, e $IC = y$, e avrete

$$BN(2a - y) : BK(y) :: LC : LH :: \overline{CI}^2(y^2) : \overline{HI}^2(x^2)^{247}.$$

Di conseguenza

$$2ax^2 - yx^2 = y^3.$$

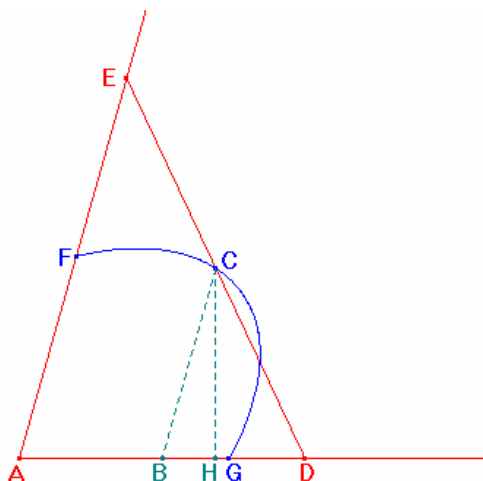
Da questa equazione, si vede facilmente, che la curva di cui si tratta è la *cissoide* degli antichi; e che il cerchio da cui essa dipende ha per centro il punto A , e per raggio AH .

²⁴⁷ Dalla similitudine dei triangoli KBF , FBN , HLI e ILC , segue che $\frac{BN}{BF} = \frac{BF}{BK} = \frac{LI}{LH} = \frac{LC}{LI} = \frac{CI}{HI}$, pertanto

$$\frac{BN}{BF} \cdot \frac{BF}{BK} = \frac{LI}{LH} \cdot \frac{LC}{LI} = \frac{CI}{HI} \cdot \frac{CI}{HI}, \text{ ovvero } \frac{BN}{BK} = \frac{LC}{LH} = \frac{CI^2}{HI^2}.$$

5.13 Problema XXXV

Se un segmento ED , di lunghezza nota, sottendente un angolo dato EAD , si inserisce in tale angolo in modo che le sue estremità D ed E tocchino sempre i lati dell'angolo AD e AE , determinare la specie della curva FCG descritta dal punto C del segmento DE durante il movimento.



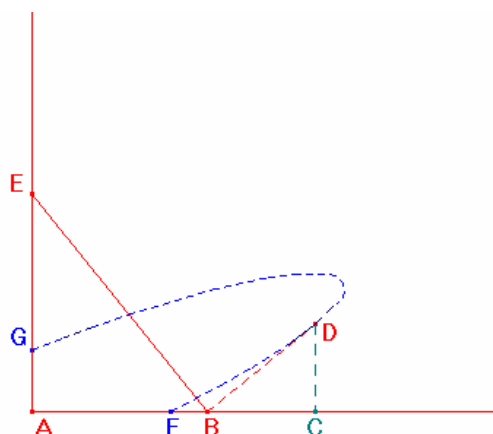
Dal punto dato C tracciate la parallela CB ad EA ; e ponete $AB = x$, $BC = y$, $CE = a$, $CD = b$; poiché i triangoli DCB e DEA sono simili, si ha, $EC : AB :: CD : DB$, cioè, $a : x :: b : BD = \frac{bx}{a}$. Si abbassi poi la perpendicolare CH , e poiché l'angolo DAE o DBC , è dato si conoscerà il rapporto dei lati del triangolo rettangolo BCH . Sia dunque $BC : BH :: a : e$, da cui $BH = \frac{ey}{a}$. E sottraendo BH da BD , il resto è $DH = \frac{bx - ey}{a}$. Ora, nel triangolo rettangolo BCH , si ha, $\overline{BC}^2 - \overline{BH}^2 = \overline{CH}^2$, ovvero $y^2 - \frac{e^2 y^2}{a^2} = \overline{CH}^2$. Pure nel triangolo rettangolo CHD , si ha, $\overline{CD}^2 - \overline{CH}^2 = \overline{HD}^2$, ovvero, $b^2 - y^2 + \frac{e^2 y^2}{a^2} = \overline{DH}^2 = \left(\frac{bx - ey}{a} \right)^2 = \frac{b^2 x^2 - 2bexy + e^2 y^2}{a^2}$, e riducendo $y^2 = \frac{2be}{a^2} \cdot yx + \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}$; e siccome in questa equazione le incognite sono solamente di

due dimensioni, è evidente che la curva non può che essere una sezione conica. Se si ricava il valore di y , si ha, $y = \frac{bex \pm \sqrt{ex^2 - a^2x^2 + a^4}}{a^2}$. Si vede che il coefficiente di x^2 sotto il radicale è $e^2 - a^2$, e poiché si ha, $a : e :: BC : BH$, e BC è necessariamente più grande di BH , poiché essa è ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui BH è un lato, ne segue che a è più grande di e , e che di conseguenza $e^2 - a^2$ è una quantità negativa; dunque la curva è un'ellisse²⁴⁸.

²⁴⁸ *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. V, p. 221, nota 265.

5.14 Problema XXXVI

Se una squadra EBD si mette in modo che una delle sue gambe EB sia appoggiata all'angolo retto EAB , mentre l'estremità D dell'altra gamba BD descrive una curva FDG , determinare questa curva.



Dal punto D abbassate la perpendicolare DC sul lato AC ; e avendo posto $AC = x$, $DC = y$, $EB = a$, e $BD = b$, poiché il triangolo BDC è rettangolo in C , avrete, $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{DC}^2 = b^2 - y^2$. Dunque $BC = \sqrt{b^2 - y^2}$, e $AB = x - \sqrt{b^2 - y^2}$. Inoltre, poiché i triangoli rettangoli BEA , DBC , sono simili²⁴⁹ si ha, $BD : DC :: BE : AB$, ovvero, $b : y :: a : x - \sqrt{b^2 - y^2}$. Dunque, $bx - b\sqrt{b^2 - y^2} = ay$, ovvero, $bx - ay = b\sqrt{b^2 - y^2}$, e elevando ciascun membro al quadrato, e riducendo, $y^2 = \frac{2abxy + b^4 - b^2x^2}{a^2 + b^2}$, e risolvendo quest'ultima equazione, si ha infine, $y = \frac{abx \pm b^2\sqrt{a^2 + b^2 - x^2}}{a^2 + b^2}$. Da cui si vede che la curva è ancora un'ellisse²⁵⁰.

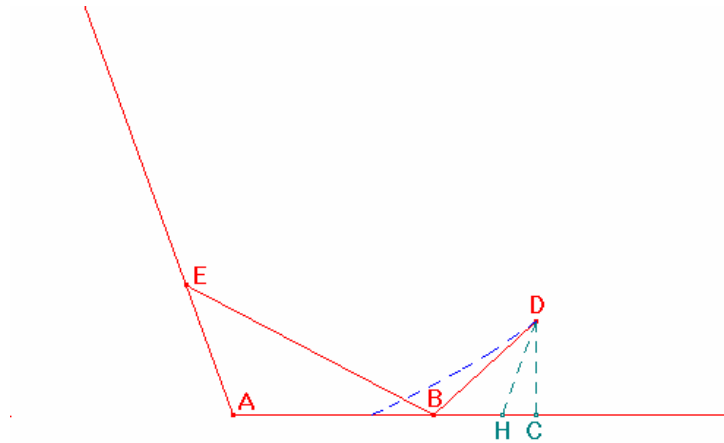
²⁴⁹ Per il I criterio in quanto, essendo l'angolo EBD retto, gli angoli ABE e DBC sono complementari.

²⁵⁰ In quanto il coefficiente di x^2 è negativo. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. V, p. 222, nota 268.

Abbiamo visto come si determina la natura della curva quando EBD e EAB sono retti. Ma se questi angoli sono di una grandezza qualunque, purché essi siano uguali, ecco come bisogna procedere²⁵¹.

Abbassate, come già su AC la perpendicolare DC , e tracciate DH in modo che essa formi un angolo DHA uguale all'angolo HAE , cioè ottuso.

E continuando a chiamare EB , a ; BD , b ; AH , x ; ponete $HD = y$.



Poiché i triangoli EAB , BHD , sono simili²⁵², avrete, $BD : DH :: BE : AB$, ovvero,

$b : y :: a : AB = \frac{ay}{b}$; sottraete AB da AH , e il resto sarà, $BH = x - \frac{ay}{b}$. Ora, siccome tutti gli

angoli nel triangolo DHC sono noti, il rapporto dei lati è pure noto²⁵³. Supponete dunque che HD stia ad HC in una ragione conosciuta qualunque, per esempio, come b sta a e , e

poiché $DH = y$, avrete, $HC = \frac{ey}{b}$, e $HB \times HC = \frac{exy}{b} - \frac{aey^2}{b^2}$. Poi, per la 12^{ma} proposizione

²⁵¹ In realtà tale restrizione non è necessaria. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. V, p. 222, nota 269.

²⁵² Per il I criterio in quanto, l'angolo HBE è uguale alla somma degli angoli AEB e EAB (essendo esterno al triangolo EAB), e l'angolo EBD è uguale all'angolo EAB .

²⁵³ La proposizione XL dei *DATI*, assicura che, se gli angoli di un triangolo sono dati di grandezza, il triangolo è dato di specie, ossia è dato il rapporto dei lati fra loro.

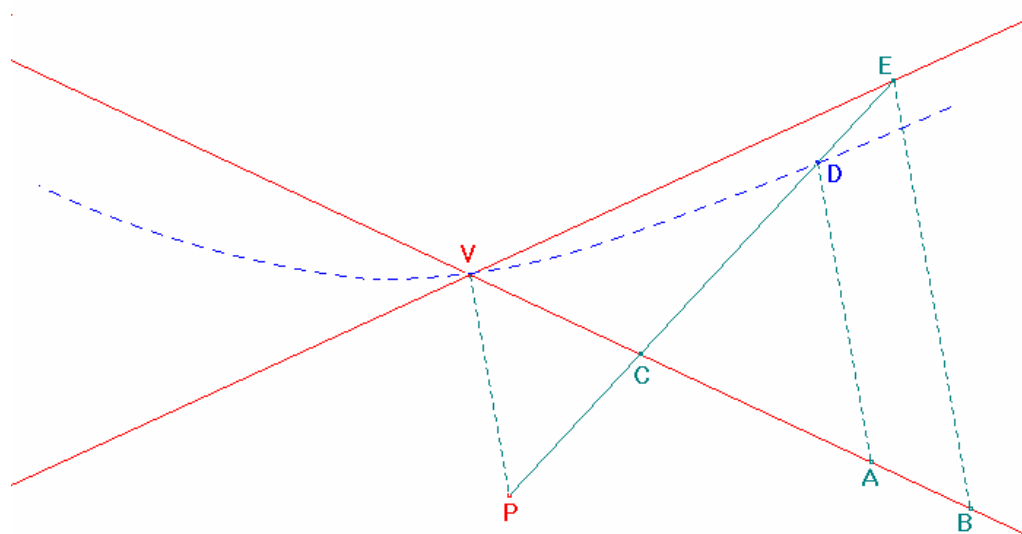
del secondo libro degli Elementi²⁵⁴, il triangolo BHD dà, $\overline{BD}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{DH}^2 + 2BH \times HC$,
ovvero, $b^2 = x^2 - \frac{2axy}{b} + \frac{a^2 y^2}{b^2} + y^2 + \frac{2exy}{b} - \frac{2aey^2}{b^2}$, e ricavando da questa equazione il
valore di x , essa diviene, $x = \frac{ay - ey \pm \sqrt{e^2 y^2 - b^2 y^2 + b^4}}{b}$, e siccome b è più grande di e ²⁵⁵,
 $e^2 - b^2$ è una quantità negativa; dunque è evidente che la curva è ancora un'ellisse.

²⁵⁴ Paragrafo 5.8, nota 233.

²⁵⁵ In quanto $DH > HC$. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. V, p. 225, note 271.

5.15 Problema XXXVIII

Se le due rette VE e VC , date di posizione, sono tagliate in modo qualunque in C e in E , da una retta PE che ruota attorno al punto P dato di posizione, e se il segmento intercettato CE è diviso in due parti CD e DE di rapporto dato, trovare il luogo del punto D .



Tracciate VP , e parallelamente a questa retta tracciate DA e EB , che incontrano VC in A e in B . Ponete $VP = a$, $VA = x$ e $AD = y$, e poiché il rapporto di CD su DE è dato, ne segue che il rapporto di CD su CE è pure noto²⁵⁶, e di conseguenza quello di DA su EB ²⁵⁷. Sia dunque questo rapporto come quello di d su e , e si avrà, $EB = \frac{ey}{d}$. Inoltre, poiché l'angolo EVB è dato, la ragione di EB su VB ²⁵⁸ lo è pure. Sia questa ragione come quella di e su f , e si avrà,

$$^{256} \frac{CD}{CE} = \frac{CD}{CD + DE} = \frac{\frac{CD}{DE}}{\frac{CD}{DE} + 1}$$

²⁵⁷ I triangoli ACD e BCE sono simili, in quanto AD è parallelo a EB , pertanto $\frac{CD}{CE} = \frac{DA}{EB}$.

²⁵⁸ Per il teorema dei seni, applicato al triangolo EVB si ha, $\frac{EB}{VB} = \frac{\sin \angle EVB}{\sin \angle VEB}$

$VB = \frac{fy}{d}$. Infine, a causa dei triangoli simili CEB , CDA , CPV , si ha questa serie di rapporti

uguali, $EB : CB :: DA : CA :: VP : VC$; e componendo,

$EB + VP : CB + VC :: DA + VP : CA + VC$ ²⁵⁹, cioè, $\frac{ey}{d} + a : \frac{fy}{d} :: y + a : x$; e facendo il prodotto

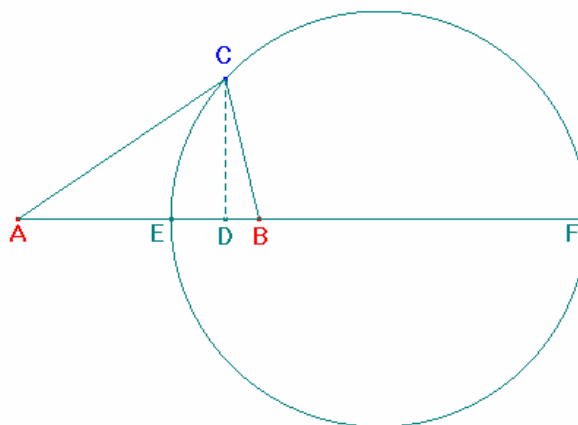
degli estremi e quello dei medi, si avrà, $exy + adx = fy^2 + fay$. Equazione le cui quantità incognite x e y non si elevano che a due dimensioni. Ne segue dunque che la curva VD , nella quale si trova il punto D , è una sezione conica; ed è un'iperbole, perché una delle due incognite x non è che di una dimensione, e nel termine exy essa si trova moltiplicata per l'altra incognita y ²⁶⁰.

²⁵⁹ Da $EB : CB = VP : VC$, scambiando i medi e componendo si ottiene $EB + VP : VP = CB + VC : VC$, ovvero, scambiando ancora i medi, $EB + VP : CB + VC = VP : VC$. Analogamente, da $DA : CA = VP : VC$ si ottiene $DA + VP : CA + VC = VP : VC$. Pertanto $EB + VP : CB + VC = DA + VP : CA + VC$

²⁶⁰ Nel disegno appare solo un ramo dell'iperbole. L'altro è descritto da D quando P giace sul segmento CE . *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. V, p. 229, nota 283.

5.16 Problema XXXIX

Se da due punti dati di posizione A e B , si tracciano a un terzo punto qualunque C , due segmenti AC , BC , che sono tra loro in un rapporto qualsiasi, trovare il luogo del punto d'incontro C .



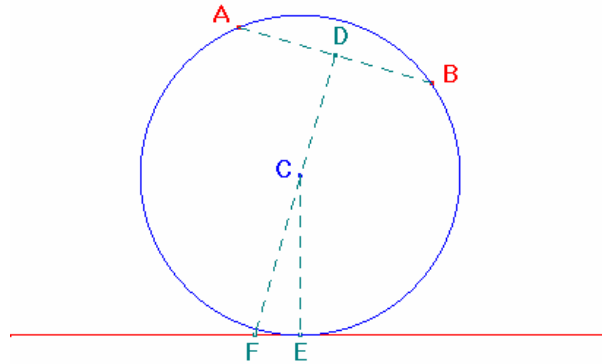
Unite i punti A e B , e sulla retta AB , abbassate la perpendicolare CD ; ponete $AB = a$, $AD = x$ e $DC = y$, avrete $AC = \sqrt{x^2 + y^2}$; $BD = a - x$, e $BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + y^2}$. Ora, essendo dato il rapporto di AC su BC , supponiamo che esso sia come quello di d su e ; fatta la proporzione, e poi il prodotto degli estremi e quello dei medi, avremo, $e\sqrt{x^2 + y^2} = d\sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + y^2}$, che risolvendo dà, $y = \sqrt{\frac{d^2 a^2 - 2d^2 ax}{e^2 - d^2}} - x^2$, equazione in cui si vede che x^2 è negativo, e che ha per coefficiente l'unità, e poiché inoltre l'angolo ADC è retto, ne segue che la curva che è luogo del punto C è un cerchio²⁶¹; e se si prendono sulla retta AB i punti E e F , in modo che si abbia la proporzione $d : e :: AE : BE :: AF : BF$, la retta EF sarà il diametro del cerchio. È facile vedere con il viceversa di questo teorema, che se si prolunga fino all'infinito il diametro EF di un cerchio qualunque, e su questo diametro così esteso, si prendono due

²⁶¹ Tale luogo è noto come *Cerchio di Apollonio*. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. V, p. 231, note 284 e 286.

punti A e B tali, che si abbia sempre $AE : AF :: BE : BF$, e da questi due punti si conducono a uno stesso punto C della circonferenza del cerchio i segmenti AC , BC , essi saranno nello stesso rapporto che AE e BE .

5.17 Problema XLIII

Descrivere un cerchio che passi per due punti dati, e tocchi una retta data di posizione.



Siano A e B i punti dati, e EF la retta data di posizione. Si chiede di far passare per questi punti, un cerchio ABE , che tocchi contemporaneamente la retta EF .

Unite A e B con una segmento²⁶² AB che dividerete in due parti uguali nel punto D , da questo punto elevate su AB la perpendicolare DF , che incontrerà la retta EF in un punto F , e il centro del cerchio, che si troverà in qualche punto di DF , supponiamo sia in C .

Unite C e B con una retta, dal punto C abbassate su FE la perpendicolare CE , ed E sarà il punto di tangenza della retta EF e del cerchio, e i segmenti CB e CE saranno uguali tra loro, essendo ciascuno di essi un raggio del cerchio cercato.

Ora, essendo dati o noti i punti A , B , D e F , ponete $DB = a$, $DF = b$ ²⁶³, e per determinare il centro del cerchio, cercate DC che chiamerete x .

²⁶² Newton usa il termine *retta* per indicare, sia le rette sia i segmenti.

²⁶³ Le posizioni fatte da Newton, sono in accordo con i *DATI* di Euclide, in quanto:

- per la proposizione XXVI, dati i punti A e B , il segmento che li unisce è dato di posizione e grandezza, quindi anche il segmento DB ;
- per la proposizione XXVII, se è dato di posizione uno degli estremi di un segmento, dato di posizione e grandezza, anche l'altro estremo è dato, quindi anche il punto D è dato di posizione;
- per la proposizione XXIX, la retta per il punto D perpendicolare ad AB è data di posizione;
- per la proposizione XXV, il punto F , in quanto intersezione di due rette date di posizione è anch'esso dato di posizione;
- per la proposizione XXVI, essendo i punti D ed F dati di posizione, il segmento DF è dato di posizione e grandezza.

Nel triangolo CDB , poiché l'angolo in D è retto, avrete $\sqrt{DB^2 + CD^2}$, ovvero $\sqrt{a^2 + x^2} = CB$.

Inoltre, $DF - DC$, ovvero $b - x = CF$.

E nel triangolo rettangolo CFE , essendo noti tutti gli angoli, il rapporto dei lati CF e CE è pure noto²⁶⁴.

Sia questo rapporto quello di d su e , e si avrà $CE = \frac{e}{d} \times CF$, ovvero $CE = \frac{be - ex}{d}$.

Ed eguagliando tra loro i segmenti CB e CE , essendo ciascuno di essi un raggio del cerchio cercato, si otterrà l'equazione $\sqrt{x^2 + a^2} = \frac{be - ex}{d}$.

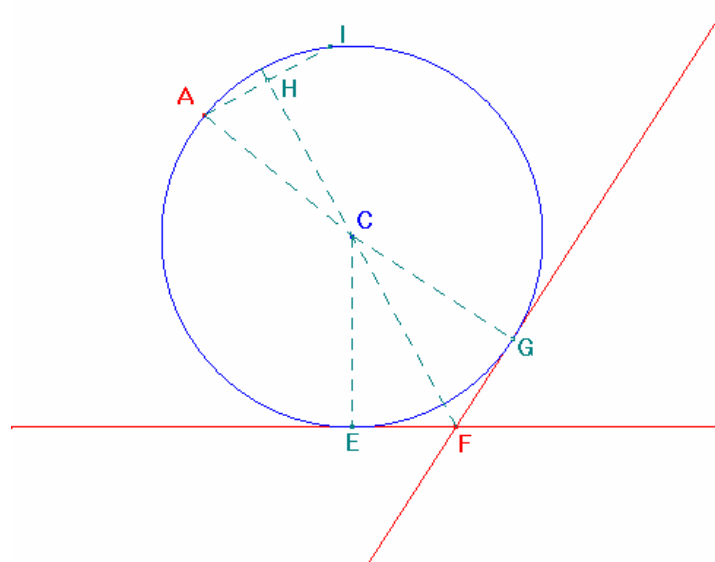
Quadrando ciascun membro, e moltiplicando per d^2 , si avrà $a^2 d^2 + d^2 x^2 = b^2 e^2 - 2be^2 x + e^2 x^2$, ovvero, risolvendo questa equazione, $x = \frac{-be^2 + d\sqrt{b^2 e^2 + a^2 e^2 - a^2 d^2}}{d^2 - e^2}$.

Si conosce dunque la lunghezza di DC , e di conseguenza il centro C , così se dal punto C , con una apertura di compasso uguale a CB , si descrive un cerchio, esso passerà per i punti A e B , e toccherà la retta FE .

²⁶⁴ La proposizione XL dei *DATI*, assicura che, se gli angoli di un triangolo sono dati di grandezza, il triangolo è dato di specie, ossia è dato il rapporto dei lati fra loro. In particolare, gli angoli del triangolo CFE sono noti in quanto, l'angolo \hat{CEF} è retto, e l'angolo \hat{CFE} è uguale all'angolo formato dalla retta data di posizione EF , e dall'asse DF , del segmento AB .

5.18 Problema XLIV

Descrivere un cerchio che passi per un punto dato, e tocchi due rette date di posizione.



Siano, A il punto dato, EF , FG le due rette date di posizione, e AEG il cerchio cercato che tocca le due rette, e passa per il punto dato A . Dividete a metà l'angolo EFG , con la retta FC ; il centro del cerchio si troverà su questa retta. Sia il punto C questo centro, dal quale abbasserete su EF e FG le perpendicolari CE e CG , e i punti E e G , saranno i punti di tangenza.

Ora, poiché i triangoli CEF e CGF , hanno i loro angoli in E e in G retti, e i loro angoli in F sono ciascuno la metà dell'intero angolo EFG , ne segue che tutti gli angoli di questi due triangoli sono noti, e di conseguenza pure il rapporto dei lati CF e, CE o CG ²⁶⁵. Sia questo rapporto quello di d su e . Allora se per determinare il centro del cerchio, si è posto

$$CF = x, \text{ si avrà } CE, \text{ o } CG = \frac{ex}{d}.$$

Inoltre, dal punto A , conducete la perpendicolare AH sulla retta FC ; e poiché il punto A è dato, i segmenti AH e FH saranno pure dati. Chiamate rispettivamente questi due segmenti

²⁶⁵ La proposizione XL dei *DATI*, assicura che, se gli angoli di un triangolo sono dati di grandezza, il triangolo è dato di specie, ossia è dato il rapporto dei lati fra loro.

a e b ²⁶⁶; e da FH , ovvero b , se sottraete FC , ovvero x , resterà $CH = b - x$, e se al quadrato di questo resto, $b^2 - 2bx + x^2$, sommate il quadrato di AH , ovvero a^2 , avrete, per la 47^{ma} proposizione del primo libro degli Elementi ²⁶⁷, $\overline{AH}^2 + \overline{CH}^2$, ovvero $a^2 + b^2 - 2bx + x^2 = \overline{AC}^2$, poiché per ipotesi l'angolo AHC è retto.

Eguagliate ora tra loro i valori dei due raggi AC e CG , ovvero i quadrati di questi stessi valori, e avrete l'equazione $a^2 + b^2 - 2bx + x^2 = \frac{e^2 x^2}{d^2}$. Sottraete da una parte e dall'altra, x^2 ,

e cambiate tutti i segni, e diverrà, $-a^2 - b^2 + 2bx = x^2 - \frac{e^2 x^2}{d^2}$. Moltiplicate tutto per d^2 , poi

dividete tutto per $d^2 - e^2$, e otterrete $x^2 - \frac{2bd^2 x}{d^2 - e^2} = -\frac{d^2(a^2 + b^2)}{d^2 - e^2}$, e risolvendo,

$$x = \frac{bd^2 - d\sqrt{b^2 e^2 + a^2 e^2 - a^2 d^2}}{d^2 - e^2}.$$

Ora si conosce dunque la lunghezza di FC , e di conseguenza la posizione del punto C , che è il centro del cerchio cercato. Se si sottrae il valore di x , ovvero FC , da b , ovvero HF , resterà,

$$HC = \frac{-e^2 b + d\sqrt{b^2 e^2 + a^2 e^2 - a^2 d^2}}{d^2 - e^2}. \text{ Assolutamente la stessa equazione di quella che}$$

abbiamo trovato nel problema precedente per determinare la lunghezza di DC .

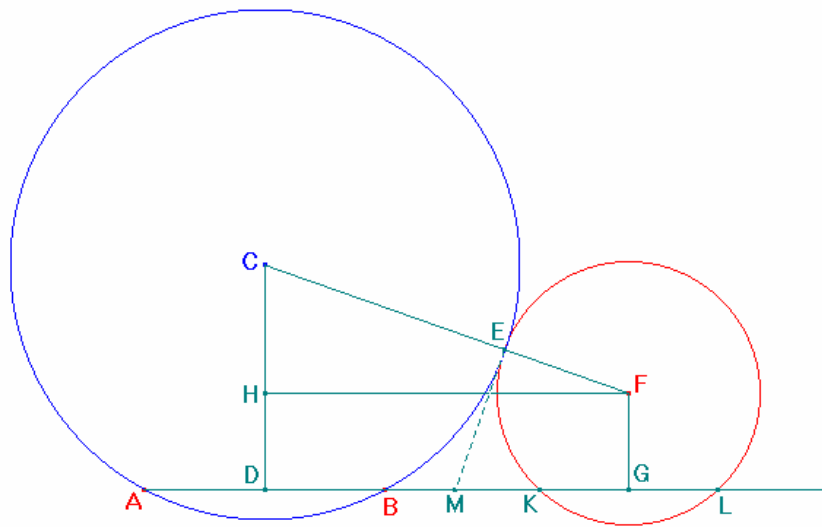
²⁶⁶ Le posizioni fatte da Newton, sono in accordo con i *DATI* di Euclide, in quanto:

- per la proposizione XXX dei suddetti *DATI*, la retta per il punto A perpendicolare ad FC è data di posizione;
- per la proposizione XXV, i punti F e H , in quanto intersezione di rette date di posizione, sono anch'essi dati di posizione;
- per la proposizione XXVI, essendo dati di posizione i punti A , F e H , i segmenti AH e FH sono dati di posizione e grandezza.

²⁶⁷ Si tratta del teorema di Pitagora.

5.19 Problema XLV

Descrivere un cerchio che passi per due punti dati, e che tocchi un altro cerchio dato di posizione.



Siano A e B i due punti dati; EK il cerchio dato di grandezza e di posizione; F il suo centro; AEB il cerchio cercato, passante per i punti A e B , e tangente all'altro cerchio; e infine C il centro del cerchio cercato. Tracciata per i punti A e B una retta indefinita, abbassate su questa retta dai centri C e F le perpendicolari CD , FG ; poi unite i centri con un segmento CF che passerà per il punto di contatto E dei due cerchi. Tracciate ancora FH parallela a DG , che incontrerà CD in H . Fatte tutte queste costruzioni, chiamate AD , ovvero DB , a ; DG , ovvero HF , b ; FG , c ; e EF (raggio del cerchio dato) d^{268} ; ponete pure $DC = x$, e

²⁶⁸ Le posizioni fatte sono in accordo con i *DATI* di Euclide, in quanto,

- per la proposizione XXVI, dati i punti A e B , il segmento che li unisce è dato di posizione e grandezza, quindi anche il segmento AD è dato di grandezza;
- per la proposizione XXVII, dato di posizione un estremo di un segmento, dato di posizione e grandezza, anche l'altro estremo è dato, pertanto il punto D è dato di posizione;
- per definizione, il punto F , in quanto centro del cerchio dato di posizione EK , è dato di posizione;
- per la proposizione XXIX, la retta per il punto F perpendicolare ad AB è data di posizione;
- per la proposizione XXV, il punto G , in quanto intersezione di due rette date di posizione è anch'esso dato di posizione;
- per definizione, il segmento EF , in quanto raggio del cerchio dato di grandezza EK , è dato di grandezza;
- per la proposizione XXVI, essendo i punti F , D e G , dati di posizione, i segmenti FG e DG sono dati di posizione e grandezza.

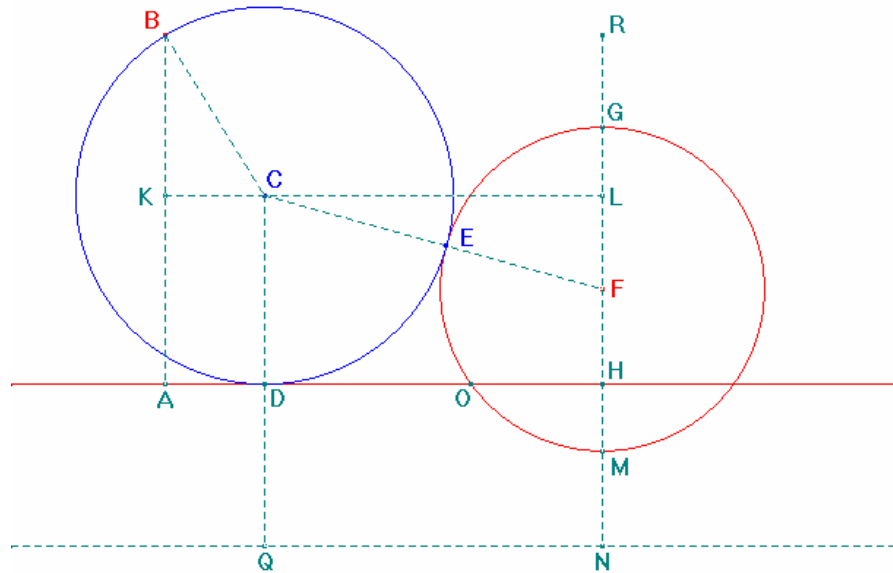
avrete $CH = CD - FG = x - c$, e $\overline{CF}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{FH}^2 = x^2 - 2cx + c^2 + b^2$; e $\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 = x^2 + a^2$. Così CB , ovvero $CE = \sqrt{x^2 + a^2}$. A CE sommate EF , e avrete, $CF = d + \sqrt{x^2 + a^2}$, il cui quadrato è $d^2 + 2d\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 + x^2$. Eguagliate questo valore di \overline{CF}^2 a quello che è già stato trovato, cioè a $x^2 - 2cx + c^2 + b^2$, e togliendo x^2 che si trova nei due membri, il resto sarà, $d^2 + a^2 + 2d\sqrt{a^2 + x^2} = c^2 + b^2 - 2cx$. Trasportate nel secondo membro, con segno opposto, $a^2 + d^2$, e l'equazione diverrà $2d\sqrt{a^2 + x^2} = c^2 + b^2 - a^2 - d^2 - 2cx$. Ponete, per abbreviare, $c^2 + b^2 - d^2 - a^2 = 2g^2$ ²⁶⁹, e l'equazione sarà ridotta a $2d\sqrt{a^2 + x^2} = 2g^2 - 2cx$, ovvero, dividendo tutto per 2, a $d\sqrt{a^2 + x^2} = g^2 - cx$, che quadrando ciascun membro dà, $d^2a^2 + d^2x^2 = g^4 - 2g^2cx + c^2x^2$. Risolta, questa equazione dà $x = \frac{-g^2c + \sqrt{g^4d^2 - d^4a^2 + d^2a^2c^2}}{d^2 - c^2}$.

Noto in tal modo x , ovvero DC , dividete il segmento AB in due parti uguali nel punto D , e da questo punto elevate su AB una perpendicolare $DC = \frac{-g^2c + d\sqrt{g^4 - a^2d^2 + a^2c^2}}{d^2 - c^2}$; poi dal centro C , con la distanza CA o CB , descrivete il cerchio ABE , e esso toccherà il cerchio EK , e passerà per i punti A e B .

²⁶⁹ Nella configurazione considerata, $d^2 - c^2 = \overline{GK}^2$, $a^2 = \overline{DB}^2$ e $b^2 = \overline{HF}^2 = \overline{DG}^2 = (DB + BK + KG)^2 > \overline{DB}^2 + \overline{GK}^2 = a^2 + d^2 - c^2$, pertanto $2g^2 = c^2 + b^2 - d^2 - a^2$ è una quantità positiva.

5.20 Problema XLVI

Descrivere un cerchio che passi per un punto dato, tocchi un cerchio dato, e una retta data di posizione.



Siano, il cerchio cercato BD , il suo centro C , il punto per il quale deve passare B , la retta che deve toccare AD , il punto di contatto con questa retta D , il cerchio che esso deve toccare GEM , il centro di questo ultimo cerchio F , e il punto di contatto dei due cerchi E . Unite con dei segmenti i punti C, B ; C, D ; C, F ; la retta CD sarà perpendicolare a AD , e CF taglierà i due cerchi nel punto di contatto E . Estendete CD fino al punto Q , in modo da avere $DQ = EF$, conducete dal punto Q la parallela QN a AD . Infine dai punti B e F abbassate le perpendicolari BA, FN , su AD e QN , e dal punto C abbassate le perpendicolari CK, CL su AB e FN . Essendo le linee BC, CD e AK , uguali, si ha pure, $BK = BA - AK = BA - BC$, Così $\overline{BK}^2 = \overline{BA}^2 - 2BA \times BC + \overline{BC}^2$. Se si sottrae \overline{BK}^2 , ovvero il suo valore, da \overline{BC}^2 , è chiaro che il resto sarà il valore di \overline{CK}^2 , di conseguenza, $\overline{BC}^2 - \overline{BK}^2$, ovvero $\overline{BC}^2 - \overline{BA}^2 + 2BA \times BC - \overline{BC}^2 = \overline{CK}^2$, ovvero $2BA \times BC - \overline{BA}^2 = \overline{CK}^2$.

Si troverà allo stesso modo che $FN \times (2FC - FN) = \overline{CL}^2$ ²⁷⁰. Dalla prima di queste due equazioni si ottiene, $2BC = \frac{\overline{CK}^2}{AB} + AB$, e dalla seconda, $2FC = \frac{\overline{CL}^2}{FN} + FN$. Così chiamando AB, a ; CK, y ; FN, b ; KL, c ²⁷¹; e $CL, c - y$, le nostre due equazioni diventeranno rispettivamente, $2BC = \frac{y^2}{a} + a$, ovvero $BC = \frac{y^2}{2a} + \frac{1}{2}a$, e $FC = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{2b} + \frac{1}{2}b$. Se si sottrae BC da FC , il resto sarà, $FE = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{y^2}{2a} - \frac{1}{2}a$. Ora se si chiamano G, H e M i punti in cui FN taglia la retta AD prolungata e il cerchio GEM ; e si estende HG in modo che $HR = AB$, allora (poiché $HN = DQ = EF = GF$) si ha, $HN = GF$, e sommando a ciascun membro FH , si avrà, $FN = GH$. Così $AB - FN = HR - GH = GR$; e $AB - FN + 2EF = a - b + 2EF = RM$, e $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + FE = \frac{1}{2}RM$. Ora noi abbiamo trovato più su, $EF = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{y^2}{2a} - \frac{1}{2}a$; sostituiamo ad EF il suo valore nell'equazione

²⁷⁰ Poiché $CF = CE + EF = CD + EF = CD + DQ = CQ = LN$, e $LF = LN - FN = CF - FN$, si ha che $\overline{CL}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{LF}^2 = \overline{CF}^2 - (CF - FN)^2 = \overline{CF}^2 - \overline{CF}^2 - \overline{FN}^2 + 2CF \times FN = -\overline{FN}^2 + 2CF \times FN = FN \times (2FC - FN)$

²⁷¹ Le posizioni fatte sono in accordo con i *DATI* di Euclide, in quanto, la conoscenza della lunghezza dei segmenti AB, FN e KL è deducibile dai dati del problema, mediante le definizioni e le proposizioni ivi presenti. Più precisamente,

- per la proposizione XXIX, la retta per il punto dato B perpendicolare alla retta data AD , è data di posizione;
- per la proposizione XXV, si deduce che il punto A , in quanto intersezione di due rette date di posizione è anch'esso dato di posizione;
- per la proposizione XXVI, il segmento che unisce A e B è dato di posizione e grandezza;
- poiché $KL = AH$ e per definizione, il punto F , in quanto centro del cerchio dato di posizione EK , è dato di posizione, per la proposizione XXIX, la retta per il punto F perpendicolare ad AD è data di posizione;
- per la proposizione XXV, il punto H , in quanto intersezione di due rette date di posizione è anch'esso dato di posizione;
- per la proposizione XXVI, essendo i punti A e H , dati di posizione, il segmento AH è dato di posizione e grandezza;
- la grandezza di FN è nota perché, $FN = FH + HN = FH + DQ = FH + EF$ e per definizione, il segmento EF , in quanto raggio del cerchio dato di grandezza GEM , è dato di grandezza;
- per la proposizione XXVI, essendo i punti F e H , dati di posizione, il segmento FH è dato di posizione e grandezza.

precedente, essa diverrà $\frac{1}{2}RM = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{2b} - \frac{y^2}{2a}$. Chiamate RM , d , e avrete

$d = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{b} + -\frac{y^2}{a}$. Moltiplicate tutto per a e b , e diverrà

$abd = ac^2 - 2acy + ay^2 - by^2$; che scriverete così, $(a-b)y^2 - 2acy - abd - ac^2 = 0$, che

dividendo tutto per $a-b$, diviene, $y^2 - \frac{2acy}{a-b} = \frac{abd - ac^2}{a-b}$. Risolta, questa equazione dà

$y = \frac{ac}{a-b} \pm \frac{\sqrt{a^2bd - ab^2d + abc^2}}{a-b}$. Se, per abbreviare, si è posto, $c:b::d:e$, e

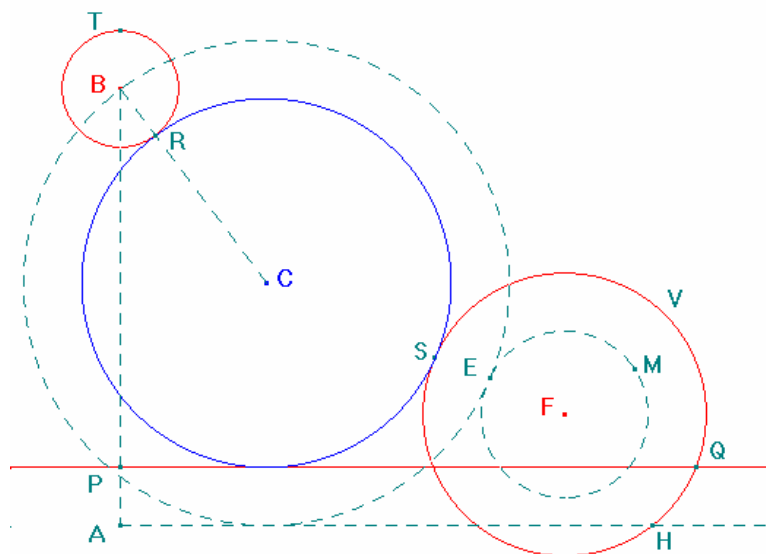
$a-b:a::c:f$, si avrà, $y^2 = fe - fc + 2fy$, ovvero $y = f \pm \sqrt{f^2 + fe - fc}$.

Noti y , ovvero KC o AD , riportate da A verso D una quantità $AD = f \pm \sqrt{f^2 + fe - fc}$; dal

punto D elevate la perpendicolare $DC = BC = \frac{\overline{CK}^2}{2AB} + \frac{1}{2}AB$, e dal punto C , come centro,

con CB o CD , come raggio, descrivete il cerchio BDE , e esso passerà per il punto dato B , toccherà la retta AD in D , e il cerchio GEM in E .

Con l'aiuto di questo problema, sarebbe facile risolverne un altro in cui si tratterebbe di descrivere un cerchio che tocchi altri due cerchi dati, e una retta data di posizione. In effetti, siano i due cerchi dati RT , SV ; i loro centri B , F ; e la retta data di posizione PQ .



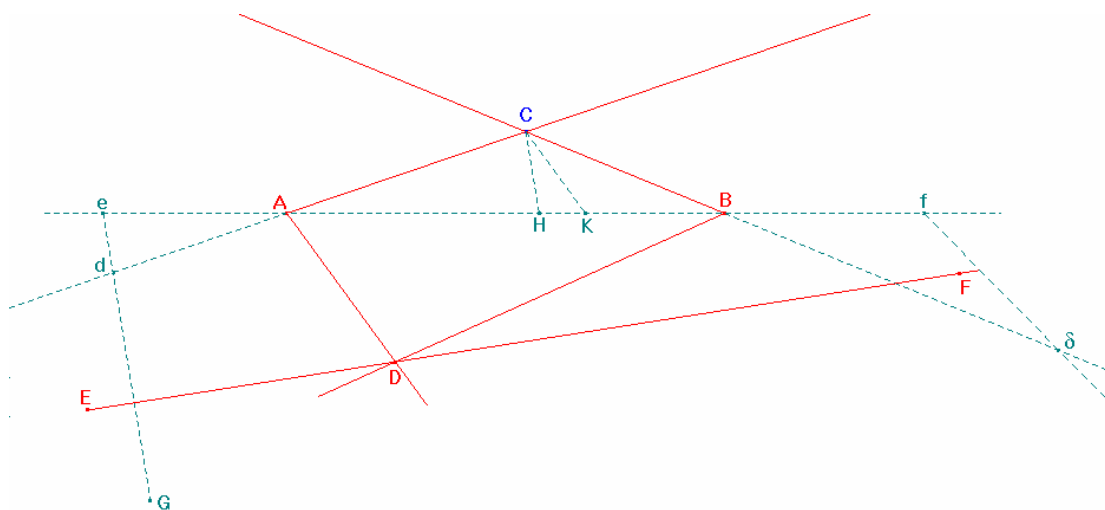
Dal centro F , e con raggio uguale a $FS - BR$, descrivete il cerchio EM . Dal punto B conducete la perpendicolare PB alla retta PQ , che prolungherete verso A , in modo da avere $PA = BR$. Dal punto A conducete AH parallelamente a PQ ²⁷². Ora descrivete, con il problema precedente, un cerchio che, passi per il punto B , tocchi la retta AH , e il cerchio EM . Sia C il centro del cerchio che abbiamo descritto; tracciate la retta BC che incontrerà TR in R , e dallo stesso centro C con un raggio uguale a CR , descrivete il cerchio RS , che toccherà i cerchi RT , SV , e la retta PQ , come è evidente dalla costruzione²⁷³.

²⁷² Sebbene il punto H esista solamente se il cerchio di centro F e la retta PQ non sono esterni, la sua presenza nella costruzione è dovuta alla sola possibilità di chiamare AH la retta per A parallela a PQ .

²⁷³ Per rendersi conto della veridicità dell'affermazione, è sufficiente osservare che il cerchio di centro C passante per R , è tangente ad ambedue i cerchi dati, in quanto, la distanza del suo centro C dai centri di tali cerchi, è pari alla somma dei rispettivi raggi. Inoltre, essendo il cerchio di centro C passante per B , tangente alla retta AH , detto G il punto di contatto, si ha che CG , in quanto raggio passante per il punto di contatto, è perpendicolare ad AH e quindi anche alla sua parallela PQ . Infine, detto U il punto di intersezione di CG con PQ , essendo $CU = CG - UG = CB - BR = CR$, si ha che il cerchio di centro C passante per R , passa anche per U , ed è tangente alla retta PQ perché il raggio CU è perpendicolare a PQ .

5.21 Problema LVII

Se un angolo dato CAD non ha che la facoltà di girare attorno al punto A dato di posizione; e l'angolo dato CBD non abbia pure che un movimento possibile di rotazione attorno al punto B dato di posizione; e se i due angoli ruotano in effetti secondo questa legge, supponendo inoltre, che i lati AD , BD si taglino sempre in una linea retta EF data di posizione, determinare la curva che descriverà l'ulteriore intersezione C degli altri due lati AC , BC .



Prolungate CA fino a d , al fine di avere $Ad = AD$; prolungate ugualmente CB fino a δ , al fine di avere $BD = B\delta$; fate l'angolo Ade uguale all'angolo ADE , e l'angolo $B\delta f$ uguale all'angolo BDF , e prolungate da una parte e dall'altra il segmento AB , finché esso incontri de in e , e δf in f ; prolungate pure ed fino a G , al fine di avere $dG = \delta f$. E dal punto C conducete CH parallelamente a ed , e CK parallelamente a δf . E se si sa che le linee eG , $f\delta$ rimangono immobili mentre gli angoli CAD , CBD ruotano secondo il luogo prescritto, attorno ai poli A e B , si avrà sempre $dG = \delta f$, e il triangolo CKH sarà dato di specie²⁷⁴. Posto dunque $Ae = a$, $eG = b$, $Bf = c$, $AB = m$, $BK = x$, e $CK = y$, diverrà

$BK : CK :: Bf : \delta f$. Dunque $\delta f = \frac{cy}{x} = dG$. Sottraete questa quantità da Ge , il resto sarà,

$ed = b - \frac{cy}{x}$. Poiché il triangolo CHK è dato di specie, fate $CK : CH :: d : e$, e

²⁷⁴ Paragrafo 5.17, nota 264. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. V, p. 305, nota 409.

$CH : HK :: e : f$, e avrete $CH = \frac{ey}{d}$, e $HK = \frac{fy}{d}$. Di conseguenza $AH = m - x - \frac{fy}{d}$. Si ha

inoltre, $AH : HC :: Ae : ed$, ossia $m - x - \frac{fy}{d} : \frac{ey}{d} :: a : b - \frac{cy}{x}$. Così, facendo il prodotto

degli estremi e quello dei medi, si avrà $mb - \frac{mcy}{x} - bx + cy - \frac{bfy}{d} + \frac{cfy^2}{dx} = \frac{aey}{d}$. Moltiplicate

tutti i termini per dx , poi ordinate, e diverrà $fcy^2 - ae \left\{ \begin{array}{l} +dc \\ -bf \end{array} \right\} yx - dcmy - bdx^2 + bdmx = 0$. Da cui

segue che, le due incognite x e y non si elevano al di là di due dimensioni, la curva che descrive il punto C è una sezione conica. Ponete $\frac{ae + bf - dc}{c} = 2p$, e avrete

$y^2 = \frac{2p}{f} \cdot xy + \frac{dm}{f} \cdot y + \frac{bd}{fc} \cdot x^2 - \frac{bdm}{fc} \cdot x$. E se si risolve questa equazione per avere il

valore di y , essa darà $y = \frac{px}{f} + \frac{dm}{2f} \pm \sqrt{\frac{p^2x^2}{f^2} + \frac{bdx^2}{fc} + \frac{pdmx}{f^2} - \frac{bdmx}{fc} + \frac{d^2m^2}{4f^2}}$. Da cui si

conclude che la curva è un'iperbole, se $\frac{bd}{fc}$ è positivo, ovvero se, essendo negativo, esso è

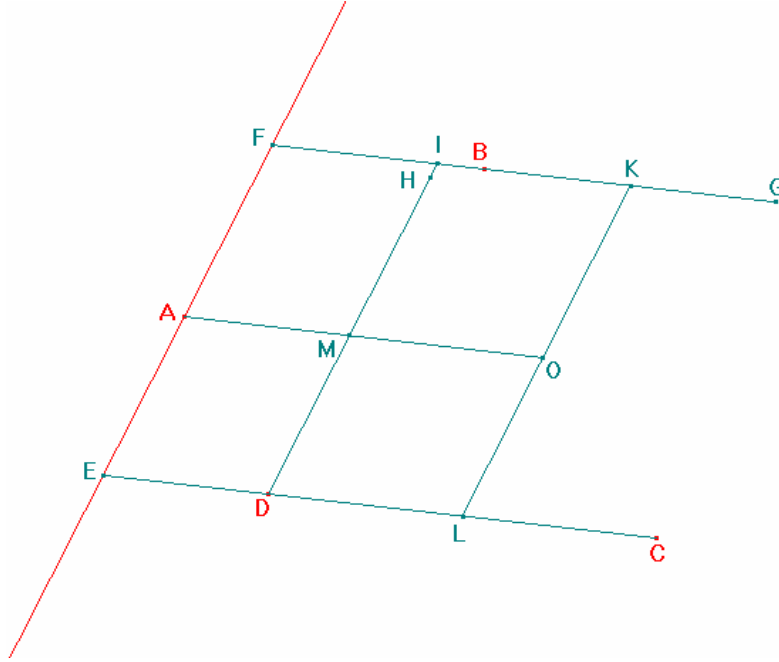
minore di $\frac{p^2}{f^2}$. Essa sarà una parabola, se $\frac{bd}{fc}$ è negativo e uguale a $\frac{p^2}{f^2}$; un cerchio o una

ellisse, se $\frac{bd}{fc}$ è negativo, e maggiore di $\frac{p^2}{f^2}$.²⁷⁵

²⁷⁵ *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. V, p. 306, nota 410.

5.22 Problema LX²⁷⁶

Descrivere una sezione conica che passi per quattro punti dati, e che in uno di questi punti tocchi una linea retta data di posizione.



Siano A, B, C, D , i quattro punti dati e AE la retta data di posizione, che deve toccare la sezione conica nel punto A . Unite due qualunque dei quattro punti, per esempio D e C , ed estendete il segmento DC , se è necessario, finché esso incontri in E la linea tangente. Per il punto B , conducete la parallela BF a DC , che incontrerà la linea tangente in F . Poi per il punto D , conducete una parallela DI ad AE , che incontrerà BF in I . Sui segmenti BF, DI , estesi se è necessario, prendete FG, HI di una lunghezza tale, che abbiate la proporzione

$$\overline{AE}^2 : CE \times ED :: \overline{AF}^2 : BF \times FG :: DI \times IH : BI \times IG,$$

e i punti G e H staranno, come si sa, sulla sezione conica²⁷⁷, purché voi prendiate FG, IH dal lato opportuno, in rapporto ai due punti F e I , come è stato insegnato nel problema precedente²⁷⁸. Dividete in due parti uguali i segmenti BG, DC, DH in K, L, M ; tracciate KL ,

²⁷⁶ Di tale problema Newton presenta anche una risoluzione analitica. *Arithmétique Universelle*, Tomo I, pp. 248, 249.

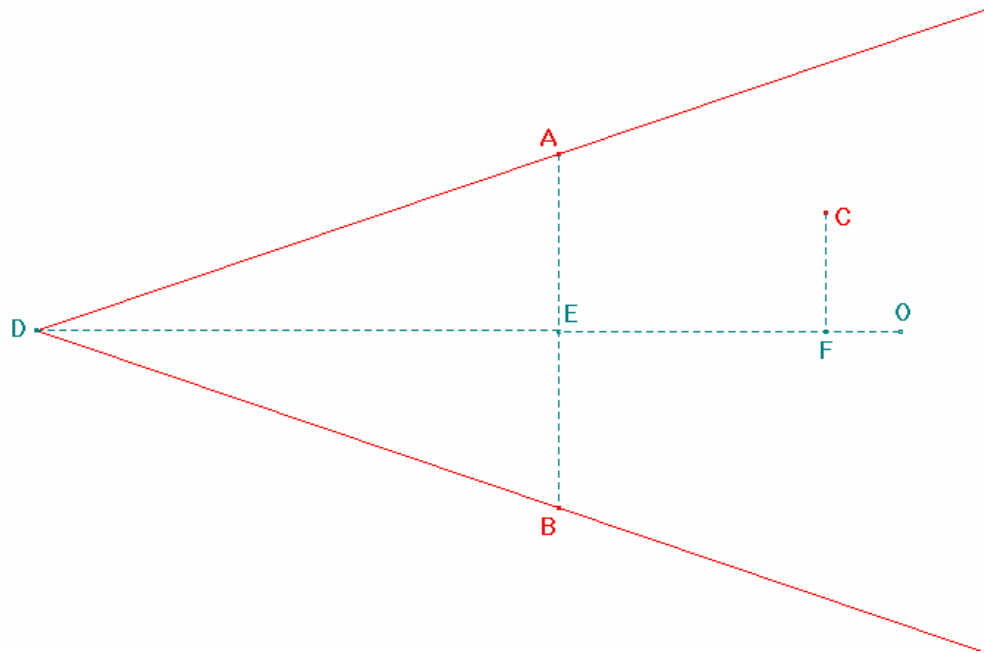
²⁷⁷ *Arithmétique Universelle*, Tomo II, nota 66, p. 180.

²⁷⁸ *Arithmétique Universelle*, Tomo I, pp. 242 - 243.

MA che si tagliano in O ; e O sarà il centro, A , il vertice, e MH l'ordinata del diametro AO .
Essendo note tutte queste cose, la sezione conica è determinata.

5.23 Problema LXI²⁷⁹

Descrivere una sezione conica che passi per tre punti dati, e che, in due di questi punti, tocchi due rette date di posizione.



Siano questi punti dati A , B , C ; le tangenti nei punti A e B , AD e BD ; infine D , l'intersezione comune delle due tangenti. Dividete AB in due parti uguali nel punto E , tracciate DE che estenderete finché esso incontri in F la retta CF , condotta parallelamente ad AB , avrete DF come diametro della curva, e AE e CF saranno le ordinate a questo diametro. Estendete DF fino al punto O , e su DO prendete OV medio proporzionale tra DO e EO . Fate allo stesso tempo questa proporzione

$$\overline{AE}^2 : \overline{CF}^2 :: VE \times (VO + OE) : VF \times (VO + OF).$$

Il punto V sarà il vertice della curva, e il punto O sarà il centro. Noti questi punti, la figura è determinata.

Adesso, $VE = VO - OE$, e di conseguenza

²⁷⁹ Di tale problema Newton presenta anche una risoluzione analitica. *Arithmétique Universelle*, Tomo I, pp. 249 – 251.

$$VE(VO + OE) = (VO - OE) \times (VO + OE) = \overline{VO}^2 - \overline{OE}^2.$$

Inoltre, poiché VO è medio proporzionale tra DO e EO , si avrà

$$\overline{AE}^2 : \overline{VO}^2 = DO \times EO;$$

di conseguenza

$$\overline{VO}^2 - \overline{OE}^2 = DO \times OE - \overline{OE}^2 = OE(DO - OE) = OE \times DE.$$

Con lo stesso ragionamento si troverà

$$VF(VO + OF) = \overline{VO}^2 - \overline{OF}^2 = DO \times OE - \overline{OF}^2;$$

di conseguenza si ha

$$\overline{AE}^2 : \overline{CF}^2 :: DE \times EO : DO \times OE - \overline{OF}^2.$$

Inoltre,

$$\overline{OF}^2 = \overline{EO}^2 - 2FE \times EO + \overline{FE}^2.$$

Così

$$DO \times OE - \overline{OF}^2 = DO \times OE - \overline{OE}^2 + 2FE \times EO - \overline{FE}^2 = DE \times EO + 2FE \times EO - \overline{FE}^2$$

e allora

$$\overline{AE}^2 : \overline{CF}^2 :: DE \times EO : DE \times EO + 2FE \times EO - \overline{FE}^2 :: DE : DE + 2FE - \frac{\overline{FE}^2}{EO}.$$

Così la quantità $DE + 2FE - \frac{\overline{FE}^2}{EO}$ è nota; sottraetela dalla quantità ugualmente nota

$DE + 2FE$, e resterà $\frac{\overline{FE}^2}{EO}$, quantità nota; chiamatela N , e avrete, $\frac{\overline{FE}^2}{N} = EO$. Così

conoscerete EO , la quale farà conoscere VO , medio proporzionale tra DO e EO .

Conclusioni

Come ho già accennato nell'Introduzione, un'immagine statica non offre che la possibilità di analizzare solo un numero finito di casi, lasciando poco spazio all'intuizione, che al contrario è sviluppata da un'immagine dinamica, in quanto permette di fare congetture e di verificarle.

Dal punto di vista costruttivo, la principale difficoltà incontrata nel raggiungere l'obiettivo costituito dalla realizzazione di un disegno interattivo, è rappresentata proprio dalla molteplicità di casi da considerare, ognuno dei quali dà luogo a una sotto-costruzione, che è necessario invalidare non appena gli oggetti che intervengono nel disegno vengono disposti in una configurazione in cui le soluzioni cui essa dà luogo non soddisfano le condizioni del problema.

In alcuni disegni, la presenza di più sottocostruzioni è evidenziata solo dal diverso colore in cui appaiono gli oggetti che rappresentano le soluzioni del problema, al variare della posizione degli oggetti che costituiscono i dati iniziali. Pertanto, il fatto che per ottenere un'immagine che non tradisce la presenza di diverse sotto-costruzioni, sia sufficiente cambiare il colore degli oggetti che costituiscono le soluzioni, pensando ai disegni in cui il numero di casi distinti, e il numero di soluzioni per ciascun caso, è elevato, mi ha dato la soddisfazione di aver raggiunto lo scopo prefissato.

Per dare la possibilità di visionare le immagini interattive realizzate, ho allegato alla tesi un CD – Rom in cui sono raccolte tutte le figure. E, dal momento che per poterle visionare è necessario disporre del *CABRI II*, ho riprodotto alcune di esse in modo interattivo con l'utilizzo di Cabri-Java, per dare modo di osservarne la dinamicità e le possibilità di manipolazione, pur senza essere in possesso di tale software.

In particolare, ad ogni problema trattato ho dedicato una pagina, in cui è presente l'enunciato del problema, seguito da una copia del disegno, o da un applet ad esso relativo, alla cui sinistra è situato un tasto che permette di aprire le figure in *CABRI*, con un semplice clic del mouse.

Costruzione di una versione interattiva dei
 “problemi” dell'*Arithmetica Universalis* di Isaac
 Newton: alcuni esempi

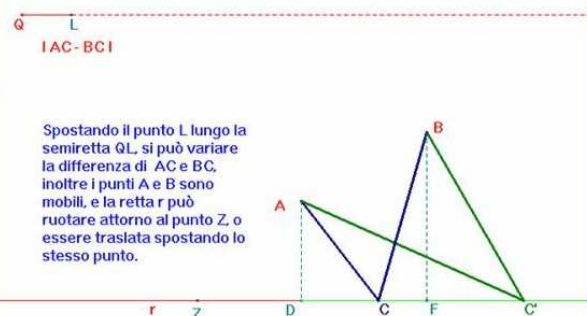
◀ Precedente
Capitolo I
Successivo ▶

- Home page
- Capitoli
- Mappa del CD

Problema XXI

Determinare un punto C sulla retta DF, tale che, se da questo punto si conducono due segmenti AC e BC, per due punti dati A e B, la differenza di questi due segmenti sia uguale ad una linea data.

Spostando il punto L lungo la semiretta QL, si può variare la differenza di AC e BC, inoltre i punti A e B sono mobili, e la retta r può ruotare attorno al punto Z, o essere traslata spostando lo stesso punto.



Capitolo I
Capitolo II
Capitolo III
Capitolo IV

Bibliografia

BOS H.J.M.

Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory; the "Construction of Equations", 1637 – ca. 1750, "Archive for History of Exact Sciences", v. 30, n. ¾, pp. 331 – 380, 1984.

BOYER C. B.

Storia della matematica, Mondatori, 2000.

BRIGAGLIA A.

La riscoperta dell'analisi classica e i problemi apolloniani, in *Geometria, Flussioni e Differenziali*, La città del sole, 1995, pp. 221 – 269.

BRIGAGLIA A. INDOVINA G.

Stelle, Girandole e altri oggetti matematici, Zanichelli, 2003.

BRIGAGLIA A. – NASTASI P.

Le ricostruzioni apolloniane in Viète e in Ghetaldi, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche v. VI, 1986 (fasc. 1).

CELLAMARE F. INDOVINA G.

Trisezione dell'angolo e costruzione dell'ettagono regolare: realizzazione con Cabri del percorso indicato da Viète nel Supplementum Geometriae, Bollettino CABRIRRSAE n. 21, Bologna, 1999.

DESCARTES R.

Opere Scientifiche, v. II, UTET, 1983.

EUCLIDE

Euclidis Data cum Commentario Marini et Scholiis Antiquis, a cura di H. Menge, 1896.

LORIA G.

Curve piane speciali, algebriche e trascendenti, v. I, Hoepli, Milano, 1930.

NEWTON I.

Arithmétique Universelle, trad. par N. Beaudoux, Paris, 1802.

NEWTON I.

The Mathematical Papers, vv. IV – V, edited by D.T. Whiteside, Cambridge, 1971 – 1972.

PAPPUS OF ALEXANDRIA

Book 7 of the Collection, part 1 – 2, edited with transl. and commentary by Alexander Jones, Springer – Verlag, 1986.

VIÈTE F.

The Analytic Art, transl. and edited by T.R. Witmer, Kent, 1983.

Bibliografia virtuale

<http://arci01.bo.cnr.it/cabri/>

Sito dell'IRRSAE – ER che pubblica il bollettino CABRIRSAE.

<http://www.cabri.imag.fr/abracadabri/>

Sito curato dai fondatori di Cabri.

<http://www.cabri.net/cabrijava/>

Sito di G. Kunz che cura la versione Java di Cabri

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/>

I tredici libri degli Elementi di Euclide in inglese illustrati da figure dinamiche realizzate in Cabri – Java nel sito della Clark University Worcester, Massachusetts, USA.